Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok Sommersemester 2025

Probeklausur Lineare Algebra II

Ich habe versucht, diese Probeklausur vom Umfang, von der Art und von der Schwierigkeit der Aufgaben ähnlich wie die eigentlichen Klausuren zu machen. Insbesondere werden auch die eigentlichen Klausuren jeweils aus 5 Aufgaben bestehen, die jeweils 8 Punkte geben. Trotzdem kann es natürlich Abweichungen – vor allem in der Schwierigkeit – geben, insbesondere, weil nicht allen Leuten alle Aufgaben gleich schwer fallen.

Die Aufgaben der Probeklausur decken nicht unbedingt alle Bereiche ab, die in den Klausuren vorkommen können. (Sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.) Klausurrelevant ist der gesamte Vorlesungstoff der LA2, und natürlich wird auch der Stoff der LA1 vorausgesetzt (der die Grundlage bildet).

Weitere Anmerkungen und Tipps zum Lösen von Aufgaben in den Klausuren:

- **Lesen Sie die Aufgaben sehr sorgfältig.** (Kleine Missverständnisse können leicht zu völlig anderen Lösungen führen, die keine Punkte mehr geben.)
- **Alle Antworten müssen begründet werden** (wenn nicht anders angegeben).
- Bei ja-nein-Fragen sollten Sie *sowohl* „ja“ oder „nein“ *als auch* eine Begründung schreiben. (Nur „ja“ oder „nein“ reicht nicht für die volle Punktzahl, und wenn Sie nur eine Begründung schreiben, aus der nicht klar hervor geht, ob Sie ja oder nein meinen, reicht das auch nicht.)
- Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen alle Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).
- Manche Begründungen können sehr kurz sein. Bei Rechenaufgaben reicht üblicherweise die Rechnung selbst als Begründung (wenn sie nachvollziehbar ist).
- Um zu begründen, dass etwas *nicht* gilt, ist es am besten, ein (einziges) ganz konkretes Gegenbeispiel anzugeben.
- Wenn Sie die Probeklausur nutzen möchten, um zu testen, ob Sie gut genug für die eigentlich Klausur vorbereitet sind, empfehle ich, dass Sie versuchen, sie zu lösen, ohne sich die Lösungen vorher anzuschauen. (Wenn man die Lösungen gesehen hat, sehen die Aufgaben oft sehr viel einfacher aus, als sie sind.)

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, seien $\alpha_1, \alpha_2 \in V^*$, und sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}, (v_1, v_2) \mapsto \alpha_1(v_1) \cdot \alpha_2(v_2)$. Zeigen Sie:

(a) β ist eine Bilinearform auf V.

(b) β ist symmetrisch genau dann, wenn α_1 und α_2 linear abhängig sind.
Hinweis: Es kann nützlich sein, die folgende Behauptung zu benutzen (und zu begründen): Sind α_1 und α_2 linear unabhängig, so existieren $v_1, v_2 \in V$ so, dass $\alpha_i(v_j) = \delta_{ij}$.

(c) Ist β symmetrisch und positiv definit, so muss $\dim V \leq 1$ sein.
Hinweis: Betrachten Sie $v \in \ker \alpha_1$.

Aufgabe 2 (2+3+3 Punkte):

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Sei $h \in \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R}^n)$ injektiv. Zeigen Sie, dass durch $\langle v, w\rangle := (h(v))^T h(w)$ ein Sklarprodukt auf V definiert wird. (Sie dürfen verwenden, dass das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt ist.)

(b) Geben Sie einen Isomorphismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (als Matrix) an, so dass die Vektoren $v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ orthogonal bezüglich des entsprechenden Skalarprodukts aus (a) sind.

(c) Seien nun $U, U' \subseteq V$ Untervektorräume, die Komplemente voneinander sind, d. h. so dass $U \oplus U' = V$ gilt. Zeigen Sie, dass ein Skalarprodukt auf V existiert, so dass bezüglich dieses Skalarprodukts gilt: $U' = U^\perp$.
Hinweis: Sie können (a) auf ein geeignetes h anwenden.

Aufgabe 3 (2+3+3 Punkte):

(a) Sei $n \geq 1$ und sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$. Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{im} A^3)$ als Funktion von n. (Vergessen Sie nicht, kleine n separat zu behandeln.)

(b) Wir nehmen an, dass $B \in K^{n\times n}$ nilpotent ist mit $\dim(\operatorname{im} B^3) = 2$. Wie groß muss n mindestens sein?
Hinweis: Es kann hilfreich sein anzunehmen, dass B in jordanscher Normalform ist. (Warum darf man das?)

(c) Seien nun $B_1, B_2 \in K^{n\times n}$, wobei B_1 nilpotent ist. Zeigen Sie, dass auch $B_1 \otimes B_2$ nilpotent ist.
Hinweis: Sie können erstmal zeigen, dass $B_1 \otimes B_2$ die Nullabbildung ist, falls B_1 die Nullabbildung ist (z. B. indem Sie $B_1 \otimes B_2$ auf einer Basis anschauen).

Aufgabe 4 (2+3+3 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ nicht ähnlich zueinander sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Zur Erinnerung: Man nennt zwei Matrizen A und B ähnlich zueinander, wenn eine invertierbare Matrix S existiert, so dass $B = S^{-1}AS$ ist.)

(b) Bestimmen Sie die Matrix von $\bigwedge^2 A$ bezüglich der Basis $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$ von $\bigwedge^2 \mathbb{C}^3$.

(c) Zeigen Sie: Ist $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar, so ist auch $\bigwedge^2 C$ diagonalisierbar.

Aufgabe 5 (2+3+3 Punkte):

Sei $f\colon \mathbb{R}^{\oplus\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\oplus\mathbb{N}}, (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots)$ und sei $p(x) := x^3 + 2x^2 \in \mathbb{R}[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass $p(f)$ nicht die Nullabbildung ist, indem Sie ein beliebiges Element von $\operatorname{im}(p(f)) \neq \{0\}$ explizit angeben.

(b) Zeigen Sie, dass kein Polynom $q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ existiert, so dass $q(f) = 0$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $p(f)$ injektiv ist.
Hinweis: Sie können z. B. zeigen, dass das Bild einer geeigneten Basis von $\mathbb{R}^{\oplus\mathbb{N}}$ unter $p(f)$ wieder linear unabhängig ist.