Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Sommersemester 2017

Aufgaben im Stil der Klausur zur Lineare Algebra II

Anmerkungen:

Die untigen Aufgaben sind den Klausuraufgaben nicht so ähnlich wie bei der Probeklausur zur linearen Algebra I. Damit trotzdem alle Bereiche, aus denen Klausuraufgaben kommen könnten, gut abgedeckt sind, habe ich hier mehr Aufgaben aufgelistet, als in der Klausur drankommen werden; in der Klausur werden es 10–12 Aufgaben sein (je nach Aufwand).

Wenn Sie finden, dass Aufgaben unklar formuliert sind, freue ich mich über Rückmeldungen.

Aufgabe 1:

Gibt es ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ mit $\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rangle = 1$, $\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \rangle = 1$, das aber nicht das hermitesche Standardskalarprodukt ist? Begründen Sie und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

Aufgabe 2:

Zeigen oder widerlegen Sie: Sind V, W endlich dimensionale, unitäre Vektorräume, so definiert das Folgende ein hermitesches Skalarprodukt auf $V \oplus W$:

$$\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \rangle := \langle v_1, v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle$$

Aufgabe 3:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und sind $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$ Untervektorräume, so gilt $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und sind $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$ Untervektorräume, so gilt $U_1^\perp \subseteq U_2^\perp$.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an.

Aufgabe 5:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch und $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, so ist UAU^{-1} auch hermitesch.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, sind V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, sind $f \in \mathrm{End}(V)$, $g \in \mathrm{End}(W)$ nilpotent mit Nilpotenzgrad m bzw. n und ist $h \in \mathrm{Hom}(V, W)$ beliebig, so ist der Endomorphismus

$$V \oplus W \to V \oplus W, (v, w) \mapsto (f(v), g(w) + h(v))$$

nilpotent mit Nilpotenzgrad höchstens $m + n$.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an.

Aufgabe 7:

Zeigen oder widerlegen Sie: Für beliebige $a_{11}, a_{21} \in \mathbb{C}$ gibt es $a_{12}, a_{22} \in \mathbb{C}$, so dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ nilpotent ist.

Geben Sie, wenn die Aussage falsch ist, insbesondere konkrete $a_{11}, a_{21} \in \mathbb{C}$ an, so dass es keine entsprechenden $a_{12}, a_{22} \in \mathbb{C}$ gibt und begründen Sie.

Aufgabe 8:

Sei $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ eine Matrix mit $\operatorname{im} A^3 \subseteq \ker A^2$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist und geben Sie alle Nilpotenzgrade an, die A haben kann. Begründen Sie.

Aufgabe 9:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad 5, so gibt es einen Vektor $v \in K^n$ mit $A^3 v \neq 0$ aber $A^4 v = 0$.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere eine Matrix an, für die es keinen solchen Vektor v gibt.

Aufgabe 10:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotente Matrizen vom gleichen Rang, so haben A und B auch den gleichen Nilpotenzgrad.

Wenn die Aussage wahr ist, geben Sie auch eine Formel an, um den Nilpotenzgrad von A aus n und $\operatorname{rk} A$ zu berechnen. Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie Matrizen A und B an, die ein Gegenbeispiel bilden.

Aufgabe 11:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sind $A, B \in K^{n\times n}$ ähnliche Matrizen, so ist A invertierbar genau dann, wenn B invertierbar ist.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 12:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f_1, f_2 \in \operatorname{End}(V)$ und ist $\lambda_1 \in K$ ein Eigenwert von f_1 und $\lambda_2 \in K$ ein Eigenwert von f_2, so ist $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ ein Eigenwert von $f_1 \circ f_2$.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an.

Aufgabe 13:

Zeigen oder widerlegen Sie: Für jedes nicht-konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ und jedes $n \geq 1$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die von p annulliert wird.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Polynom und ein n an, so dass es keine solche Matrix A gibt.

Aufgabe 14:

Sind die folgenden Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ähnlich? Begründen Sie.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15:

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5};$$

begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 16:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, sind U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und ist $f \in \mathrm{Hom}(U, W)$ ein Homomorphismus, so gibt es Homomorphismen $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $h \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so dass $f = h \circ g$.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere konkrete U, V, W und f an, die ein Gegenbeispiel bilden.

Aufgabe 17:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, so ist

$$V^* \oplus V^* \to \mathrm{Hom}(V, K^2), (\alpha, \beta) \mapsto (v \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(v) \\ \beta(v) \end{pmatrix})$$

eine lineare Abbildung.

Aufgabe 18:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, sind V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f\colon V \times V \to W$ bilinear, so ist die Abbildung $V \to W, v \mapsto f(v, v)$ linear.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere konkrete V, W und f an, die ein Gegenbeispiel bilden.

Aufgabe 19:

Gibt es eine alternierende multilineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ mit

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Begründen Sie und geben Sie ggf. ein konkretes Beispiel für eine solche Abbildung an.

Aufgabe 20:

Ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, v \mapsto v \otimes v$ linear? Begründen Sie.

Aufgabe 21:

Gibt es eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, die $u \otimes v$ auf $u + v$ abbildet für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie.

Aufgabe 22:

Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 23:

Bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^4, (\mathbb{R}^2)^*)$; begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 24:

Gibt es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die $v \otimes v$ auf $\|v\|^2$ abbildet? Begründen Sie und geben Sie ggf. für ein konkretes Beispiel f an, was $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix})$ ist.

Aufgabe 25:

Zeigen oder widerlegen Sie: Sind $K \subseteq K'$ Körper und ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, so dass auch $V_{K'}$ als K-Vektorraum endlich-dimensional ist, so ist $\dim_K V_{K'} \geq \dim_K V$.

(Zur Erinnerung: $\dim_K V_{K'}$ ist die Dimension von V, wenn man es als K-Vektorraum auffasst.)

Aufgabe 26:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so ist $((\bigwedge^2 V) \otimes \mathbb{R}^2) \oplus V$ isomorph zu $V^{\otimes 2}$.

Aufgabe 27:

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine bilineare Abbildung mit $f(e_i, e_i) = 0$ für $i = 1, 2, 3$ (wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist), so ist f alternierend.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an.

Aufgabe 28:

Gibt es eine lineare Abbildung $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ abbildet auf $a_1 b_2 - a_2 b_1$? Begründen Sie Ihre Antwort.