Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und sind $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle_1$ und $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle_2$ zwei hermitesche Skalarprodukte auf V, so ist auch die Abbildung $V \times V \to \mathbb{C}$, $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle_1 + \langle u,v\rangle_2$ ein hermitesches Skalarprodukt auf V.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an und begründen Sie, dass es sich um ein Gegenbeispiel handelt.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $n \geq 2$ gerade, ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix und ist $U \subset \mathbb{C}^n$ ein Untervektorraum, so dass $A(U) = U^\perp$ gilt (wobei $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^n$ ist), so ist $A^2(U) = U$.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, $n \geq 1$ und sind $A, B \in K^{n\times n}$ Matrizen, so dass AB nilpotent ist, so ist auch BA nilpotent.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an und begründen Sie, dass es sich um ein Gegenbeispiel handelt.

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, $n \geq 1$, $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten und $B \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit den gleichen Eigenwerten wie A, so sind A und B ähnlich.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an und begründen Sie, dass es sich um ein Gegenbeispiel handelt.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}$. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $v \in V \setminus \{0\}$, so gibt es genau ein $\alpha \in V^*$, so dass $\alpha(v) = 1$ ist.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an und begründen Sie, dass es sich um ein Gegenbeispiel handelt.

Aufgabe 7 (2 Punkte):

Gibt es eine bilineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^9$, so dass aus $f(v,w) = 0$ folgt, dass sowohl $v = 0$ als auch $w = 0$ ist? Begründen Sie und geben Sie ggf. ein konkretes Beispiel für eine solche Abbildung an.

Aufgabe 8 (2 Punkte):

Sei $V = \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ und sei U die Teilmenge $\{u \otimes v \mid u, v \in \mathbb{R}^3\}$ von V. Ist U ein Untervektorraum von V? Begründen Sie.

Aufgabe 9 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Sind V und W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, so ist $(V \oplus W)^{\otimes 3}$ isomorph zu $V^{\otimes 3} \oplus W^{\otimes 3}$.

Wenn die Aussage falsch ist, geben Sie insbesondere ein konkretes Gegenbeispiel an und begründen Sie, dass es sich um ein Gegenbeispiel handelt.

Aufgabe 10 (2 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sind $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, so ist $v_1 \wedge (v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2 + v_3) \wedge (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = v_4 \wedge v_3 \wedge v_2 \wedge v_1$.