....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 10

Abgabe am 6.7.2017 bis 8:30 Uhr

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte):

In dieser Aufgabe soll die folgende Konstruktion betrachtet werden: Gegeben sind K-Vektorräume V und W und ein $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Gesucht ist ein K-Vektorraum U und ein $g \in \operatorname{Hom}(U, V)$, so dass (1) $f \circ g = 0$ gilt, und so dass (2) die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

($\star$) Ist U' ein weiterer K-Vektorraum und $g' \in \operatorname{Hom}(U', V)$ mit $f \circ g' = 0$, so gibt es genau ein $h \in \operatorname{Hom}(U', U)$ mit $g' = g \circ h$.

Wir betrachten zunächst das Beispiel $K = \mathbb{Q}$, $V = W = \mathbb{Q}^3$, $f(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ 0 \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass in dem Beispiel die folgenden drei Paare (U_i, g_i) die gewünschten Bedingungen (1), (2) nicht erfüllen: Geben Sie an, welche Bedingung verletzt ist und geben Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel an. Sie brauchen nicht weiter zu begründen, warum es sich um ein Gegenbeispiel handelt.

(i) $U_1 = \mathbb{Q}^3, g_1(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ -x \\ y+z \end{smallmatrix}\right)$ (ii) $U_2 = \mathbb{Q}^1, g_2(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{smallmatrix}\right)$ (iii) $U_3 = \mathbb{Q}^3, g_3(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} z \\ y \\ x \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Geben Sie (immer noch in diesem Beispiel) U und g an, so dass (1) und (2) erfüllt sind und begründen Sie.

(c) Zeigen Sie, dass für beliebige K, V, W, f gilt: U und g erfüllen (1) und (2) genau dann, wenn g einen Isomorphismus von U nach $\ker f$ induziert. (Damit ist gemeint: g ist injektiv, und $\operatorname{im} g = \ker f$.)

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Wir betrachten die Basis $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die zugehörige duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ an; drücken Sie sie als 1×3-Matrizen aus.

Aufgabe 3 (1+2 Punkte):

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon (V^*)^n \to \operatorname{Hom}(V, K^n), f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (v \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(v) \\ \vdots \\ \alpha_n(v) \end{pmatrix})$$

(a) Geben Sie im Beispiel $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $n = 2$ das Bild $f((1\ 3\ 5), (0\ 8\ 15))$ als Matrix an und begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie: f ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen; geben Sie auch die inverse Abbildung an.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte):

Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein m-dimensionaler Untervektorraum. Wir setzen $U' := \{\alpha \in V^* \mid \forall u \in U\colon \alpha(u) = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) U' ist ein Untervektorraum von V^*.

(b) Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so dass $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von U bilden, und ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zugehörige duale Basis von V^*, so ist $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ eine Basis von U'.

(c) $U = \{v \in V \mid \forall \alpha \in U'\colon \alpha(v) = 0\}$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1]Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.