....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 2

Abgabe am 4.5.2017 bis 8:30 Uhr

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei

$$U = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0 \}.$$

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$...

(a) ...bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^3$.

(b) ...bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u, v \rangle = u^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \bar{v}.$$

Aufgabe 2 (2+3 Punkte):

(a) Wenn $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^3$ beliebige linear unabhängige Vektoren sind, wie viele verschiedene Skalarprodukte kann es dann gegeben, so dass v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis bilden? Genauer:
   (i) Kann es sein, dass es gar kein solches Skalarprodukt gibt?
   (ii) Kann es sein, dass es genau eins gibt?
   (iii) Kann es sein, dass es mehrere gibt?
   Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst die Antwort, wenn v_1, v_2, v_3 die Standard-Basis ist.

(b) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an, so dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u, v \rangle = u^T A \bar{v}$$

eine Orthonormalbasis bilden.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, seien $u_1, \dots, u_k \in V$, und sei $U := \langle u_1, \dots, u_k \rangle_{\mathbb{C}}$ der von $u_1, \dots, u_k$ erzeugte Untervektorraum. Zeigen Sie: $\{v \in V \mid v \perp u_1 \wedge \dots \wedge v \perp u_k\} = U^\perp$.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte):

Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und U ein Untervektorraum.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to U$, so dass für alle $v \in V$ gilt: $v - f(v) \in U^\perp$. (Diese Abbildung wird *orthogonale Projektion* von V nach U genannt.)
   Hinweis: Wenn Sie ein geeignetes Resultat aus der Vorlesung verwenden, müssen Sie nur noch zeigen, dass f linear ist.

Im Folgenden sei f diese orthogonale Projektion. Zeigen Sie:

(b) Ist $u_1, \dots, u_k$ eine Orthonormalbasis von U, so ist $f(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle u_i$.

(c) Für alle $v \in V$ ist $f(v)$ der Vektor aus U, „der am nächsten an v liegt“, d.h. für alle $u \in U \setminus \{f(v)\}$ gilt: $\|v - u\| > \|v - f(v)\|$.
   Hinweis: Es kann nützlich sein, zunächst zu zeigen, dass der Satz von Pythagoras in unitären Vektorräumen gilt.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1]Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.