................................................
Name und Matr-Nr. (a)

................................................
Name und Matr-Nr. (b)

...........
Gruppe

# Lineare Algebra II – Blatt 4

Abgabe am 18.5.2017 bis 8:30 Uhr

| 1 | 2 | 3 | 4 | B[1] | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | (a) | |
| | | | | (b) | |

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

**Aufgabe 1 (2 Punkte):**

Finden Sie heraus, welche der folgenden hermiteschen Matritzen positiv definit sind, indem Sie ihre Eigenwerte berechnen:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 5 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2 (4 Punkte):**

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2i \\ -1 & 1 & 2i \\ 2i & -2i & -5 \end{pmatrix}$. Geben Sie eine unitäre Matrix $S$ an, so dass $\bar{S}^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 3 (4 Punkte):**

(a) Geben Sie für die folgenden Matrizen $A_1$ und $A_2$ jeweils drei Vektoren $v_-, v_0, v_+ \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ an, so dass gilt: $v_-^T A_i \bar{v}_- < 0$; $v_0^T A_i \bar{v}_0 = 0$; $v_+^T A_i \bar{v}_+ > 0$; oder begründen Sie, dass es einen solchen Vektor nicht gibt.

$$A_1 := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Sei nun $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige hermitesche Matrix. Beschreiben Sie, wie man anhand der Eigenwerte von $A$ herausfinden kann, ob es Vektoren $v \in \mathbb{C}^n$ gibt, so dass $v^T A\bar{v} < 0$ ist.

**Aufgabe 4 (6 Punkte):**

Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *positiv semidefinit*, wenn für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt: $v^T A\bar{v} \geq 0$. Zeigen Sie:

(a) Für beliebige Matrizen $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Matrix $A := B^T \bar{B}$ positiv semidefinit.

(b) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine positiv semidefinite hermitesche Diagonalmatrix, so gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $B^T \bar{B} = A$.

(c) Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine beliebige positiv semidefinite hermitesche Matrix, so gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $B^T \bar{B} = A$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1]Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.