.................................................
Name und Matr-Nr. (a)

.................................................
Name und Matr-Nr. (b)

...........
Gruppe

# Lineare Algebra II – Blatt 8

Abgabe am 22.6.2017 bis 8:30 Uhr

| 1 | 2 | 3 | 4 | B[1] | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | (a) | |
| | | | | (b) | |

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

**Aufgabe 1 (1+2+1+2 Punkte):**

Welche der folgenden $\mathbb{R}$-Matrizen besitzt eine Jordansche Normalform (über $\mathbb{R}$)? Bestimmen Sie die Jordansche Normalform gegebenenfalls und begründen Sie Ihre Antworten.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Es ist nicht verlangt, dass Sie eine Matrix $S$ angeben, so dass $SA_iS^{-1}$ in Jordanscher Normalform ist. Sie können sich viel Arbeit ersparen, wenn Sie nicht versuchen, ein solches $S$ anzugeben.

**Aufgabe 2 (4 Punkte):**

Sei $K$ ein Körper und sei $A \in K^{n_1 \times n_1}$ eine Matrix mit nur einem Eigenwert $\lambda \in K$. Wir nehmen an, dass das charakteristische Polynom die Form

$$\chi_A = (\lambda - X)^{n_2}$$

hat und das Minimalpolynom die Form

$$\psi_A = (X - \lambda)^{n_3}.$$

Außerdem sei $n_4 = \dim \operatorname{Eig}_\lambda(A)$ und $n_5 = \dim \operatorname{Hau}_\lambda(A)$.

(a) Für welche $i, j$ gilt die Gleichung $n_i = n_j$ und für welche gilt die Ungleichung $n_i \leq n_j$?
Begründen Sie die Gleichungen und Ungleichungen, die immer gelten (ein Verweis auf einen Satz aus der Vorlesung kann genügen), und geben Sie eine Matrix $A$ an, für die nur diejenigen der Gleichungen gelten, die immer gelten.

(b) Sei nun $A$ eine Matrix $A$ mit $n_3 = 5$, und $n_4 = 4$. Wie groß muss $n_5$ mindestens sein? Geben Sie eine Matrix mit diesem minimalen $n_5$ an und begründen Sie, dass $n_5$ nicht kleiner sein kann.

**Aufgabe 3 (4 Punkte):**

Sei $K$ ein Körper und seien

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \quad\quad\quad\uparrow & \\ \quad\quad j\text{-te Spalte} & \end{array} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 \cdots & 0 & b_{k\ell} & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \quad\quad\quad\uparrow & \\ \quad\quad \ell\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Matrizen in $K^{n \times n}$, die jeweils nur genau einen Eintrag $\neq 0$ haben.

(a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $A$.
Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung danach, ob $i = j$ ist oder nicht.

(b) Unter welchen Bedingungen an $a_{ij}, b_{k\ell}, i, j, k, \ell$ sind $A$ und $B$ ähnlich? (Geben Sie eine Bedingung an, die äquivalent dazu ist, dass die Matrizen ähnlich sind und begründen Sie dies.)

**Aufgabe 4 (2 Punkte):**

Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist ähnlich zu ihrer Transponierten $A^T$.

Hinweis: Betrachten Sie die Jordansche Normalform und verallgemeinern Sie Ihr Resultat zu $A_4$ aus Aufgabe 1.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.