1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Lineare Algebra II – Blatt 9

Abgabe am 29.6.2017 bis 8:30 Uhr

....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Gibt es Matrizen B_i mit den folgenden Eigenschaften? Wenn ja, geben Sie alle Jordanschen Normalformen an, die eine solche Matrix haben kann; wenn nein, begründen Sie. Hierbei bezeichnet ψ_{B_i} das Minimalpolynom und χ_{B_i} das charakteristische Polynom von B_i.

(a) $B_1 \in \mathbb{C}^{10\times 10}$, $\dim(\ker(B_1 - 3I_{10})) = 3$, $\dim(\ker(B_1 - 3I_{10})^2) = 5$, $\dim(\ker(B_1 - 3I_{10})^3) = 8$.

(b) $B_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\psi_{B_2} = X^3 - X$.

(c) $B_3 \in \mathbb{C}^{7\times 7}$, $\chi_{B_3} = X^6 - X^7$, $\dim(\ker B_3^3) = 4$.

(d) $B_4 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $\psi_{B_4} = X^2 + 3X + 5$, $\chi_{B_4} = -X^3 - X^2 + X + 8$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektoraum. Einen Untervektorraum $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ nennt man *Komplement von* U, wenn $U \oplus U' = \mathbb{R}^n$ gilt (siehe Konvention 7.3.5 für direkte Summen von Untervektorräumen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie und geben Sie bei falschen Aussagen ein konkretes Gegenbeispiel in $\mathbb{R}^2$ an.

(a) Zu jedem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert (mindestens) ein Komplement.

(b) Zu jedem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert genau ein Komplement.

(c) Zu jedem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert (mindestens) ein Komplement, das eine Basis aus Standardbasisvektoren besitzt.[2]

(d) Zu jedem $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert genau ein Komplement, das eine Basis aus Standardbasisvektoren besitzt.

Aufgabe 3 (2+1 Punkte):

In dieser Aufgabe soll die in der Vorlesung noch nicht bewiesene Behauptung „$f_\mathrm{d} \circ f_\mathrm{n} = f_\mathrm{n} \circ f_\mathrm{d}$“ aus Satz 7.4.11 bewiesen werden.

(a) Sei K ein Körper, sei $A \in K^{m\times m}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform und sei

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_\ell & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_\ell \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_\ell & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_\ell \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{=A_\mathrm{d}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{=A_\mathrm{n}}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\mathrm{d} A_\mathrm{n} = A_\mathrm{n} A_\mathrm{d}$ gilt.
Hinweis: Prüfen Sie $A_\mathrm{d} A_\mathrm{n} e_i = A_\mathrm{n} A_\mathrm{d} e_i$ für die Standardbasisvektoren e_i. Folgt daraus schon die Behauptung?

(b) Sei nun V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus, dessen Jordansche Normalform die Matrix A aus (a) ist, d. h. $A = g^{-1} \circ f \circ g$ für einen Isomorphismus $g\colon K^m \to V$. Wir setzen (wie im Beweis von Satz 7.4.11) $f_\mathrm{d} := g \circ A_\mathrm{d} \circ g^{-1}$ und $f_\mathrm{n} := g \circ A_\mathrm{n} \circ g^{-1}$. Zeigen Sie: $f_\mathrm{d} \circ f_\mathrm{n} = f_\mathrm{n} \circ f_\mathrm{d}$.

Aufgabe 4 (1+1+1+2 Punkte):

Seien $p_1 = (X-1)^2$ und $p_2 = X^3 - 3X^2$.

(a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ in Jordanscher Normalform an, die $p_1 \cdot p_2$ als Minimalpolynom hat.

(b) Finden Sie Polynome $q_1, q_2 \in K[X]$, so dass $p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 = 1$.

(c) Bestimmen Sie $A_1 := (p_1 \cdot q_1)(A)$ und $A_2 := (p_2 \cdot q_2)(A)$, begründen Sie, warum $A_1 + A_2 = I_5$ gelten sollte.

(d) Sei nun K ein beliebiger Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus, λ ein Eigenwert von f und $U := \mathrm{Hau}_\lambda(f)$ der zugehörige Hauptraum. Zeigen Sie: Es gibt einen Untervektorraum $U' \subseteq V$ und ein Polynom $q \in K[X]$ mit folgenden Eigenschaften:
$f(U') \subseteq U'$; $V = U \oplus U'$; $q(f)|_U = f|_U$; $q(f)|_{U'} = 0$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1]Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.

[2]Die leere Menge wird auch als eine Basis aus Standardbasisvektoren angesehen.