INHALTSVerzeichnis der Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§1: Bilinearformen

ℓ1: Einleitung und Wiederholung: Normale Endomorphismen und Hauptachsentransformationen

Einleitung und Übersicht zur LA II, Wiederholung aus LA I: Grundbegriffe zu Bilinearformen und Skalarprodukten, normale Endos und ihre H.A.trafos

---

ℓ2: Trägheitssatz von Sylvester

Signatur eines selbstadj. Endos/selbstadj. Matrix, (Semi-) Definitheit, Trägheitssatz von Sylvester, Hauptunterdeterminanten, Hurwitz-Kriterium

---

ℓ3: Quadriken

Quadrik = Fläche 2-ten Grades im $\mathbb{R}^n$, quadratische Form, Elimination der gemischten Terme mit Hauptachsentrafo, Kegelschnitte, Quadriken im $\mathbb{R}^3$, Matrix einer Bilinearform

---

ℓ4: Die orthogonale Gruppe

orthogonale Gruppe $O(n)$, spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$, Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$, Erzeugung von $O(n)$ bzw. $SO(n)$ mit Spiegelungen, $O(V)$ und Isometrien

---

ℓ5: Permutationen und Determinanten

Permutation, symmetrische Gruppe S_n, Transposition, Permutationsmatrix, (un)gerade Permutationen, Erzeugung durch Transpositionen/Spiegelungen, Leibniz-Formel für det

---

§2: Normalformentheorie

ℓ6: Hauptvektorenketten

Normalformproblemstellung, diag'bar + trigon'bar, Hauptvektor m-ter Stufe, Kette von HVen, Jordansche Normalform bei Existenz einer Hauptvektorenketten-Basis

---

L7: Die Polynomalgebra

K-Algebra, Beispiele Hom(U,U) und $K^{m\times m}$, freie von einem Element erzeugte K-Algebra $K[T]$ = Polynomalgebra, Einsetzhomomorphismus, Endo in Polynom einsetzen

L8: Der Euklidische Algorithmus

Grad eines Polynoms, Polynom-Division mit Rest, Teilbarkeit, ggT, teilerfremd, Satz von Bézout = Darstellbarkeit des ggT als L.K., Berechnung der Bézout-Koeffizienten

L9: Zerlegung von Polynomen

Nullstelle / Linearfaktor, Zerlegung von Polynomen über alg. abg. Körpern in Linearfaktoren, irreduzible und reduzible Polynome, Zerlegung in irreduzible Faktoren, Lemma von Euklid

L10: Zerlegung eines Raums nach einem Endomorphismus

invarianter Unterraum, Minimalpolynom, Teiler des Mipos und Zerlegung von V in invariante URe, Zerlegung von V laut Zerlegung des Mipos in irreduzible Polynome

L11: f-zyklische Unterräume – Teil A

Spezialfall Mipo $\varphi = p^r$, (verallgemeinerter) Hauptraum, f-zyklische Unterräume, Dimension und Unzerlegbarkeit f-zyklischer Unterräume

L11: f-zyklische Unterräume – Teil B

Algorithmus zur Ausschöpfung mit f-zyklischen Unterräumen, Beweis der Korrektheit und Terminierung des Algorithmus

L12: Zusammenfassung zum Allgemeinen Zerlegungssatz

Allgemeiner Zerlegungssatz der Normalformentheorie, Begleitmatrix, Ausgewählte Beispiele zur Konstruktion der Normalform laut allg. Zerlegungssatz

l13: Jordansche Normalform (JNF)

Jordansche Normalform, μ teilt χ, Satz von Cayley-Hamilton, Anzahl von Begleitmatrizen, Zusammenhang: geometrische und algebraische Vielfachheit

---

l14: Anwendung der JNF bei Differentialgleichungen

lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Anfangswertproblem, Lösung (Existenz- und Eindeutigkeit) davon mit JNF-Theorie

---

§3: General abstract nonsense

l15: Quotienten und direkte Summen von Vektorräumen

Strukturtransfer, Quotientenraum, universelle Eigenschaft, direkte Summe einer Familie von Vektorräumen als Verallgemeinerung des Basisbegriffs, freier Vektorraum $V(B)$

---

l16: Universelles über Algebren

K-Algebra (mit Eins), A-Hom., freie Algebra über B, Konstruktion als $A(B)$, homogene Unterräume $A_n(B)$, Ideale in Algebren, Quotientenalgebra A/U mit univ. Eig.

---

l17: Freie kommutative Algebren

Quotientenalgebra unter Berücksichtigung homogener Unterräume, kommutative Algebra, Konstruktion davon als Quotientenalgebra, Polynomalgebra, Bilder kommutativer Algebren sind kommutativ

---

l18: Tensoralgebren

Tensoralgebra, Tensorräume, n-lineare Abb., Tensor-Abb., universelle Eigenschaft der Tensorräume und des Tensorprodukts, Beispiel $K^{n\times m} \cong K^n \otimes K^m$

---

§19: Äußere Algebren

Alternierende Abbildung, Äußere Algebra $E(V)$, Multiplikation $\wedge$, universelle Eigenschaft der äußeren Algebra, Struktur der $E_m(V)$, Verschwinden von $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$

---

§20: Zwei Anwendungen von äußeren Algebren

Verallgemeinerung des Laplaceschen Entwicklungssatzes, Rang einer Matrix und nichtverschwindende Unterdeterminanten, Dachprodukt von Basiselementen, Plücker-Koordinaten & projektive Geometrie.

Ende der Vorlesung