Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

ℓ10: Zerlegung eines Raums nach einem Endomorphismus

Stichworte: invarianter Unterraum, Minimalpolynom, Teiler des Mipos und Zerlegung von V in invariante URe, Zerlegung von V laut Zerlegung des Mipos in irreduzible Polynome

---

Im Folgenden sei V stets ein endl. dim. Vektorraum über einem Körper K.
Wir behandeln nun bestimmte Untervektorräume von V (mit $U_{..}$ bezeichnet).
Interessant waren in LA I vor allem die Eigenräume zu Endomorphismen.
Das Konzept soll ab jetzt vertieft und verallgemeinert werden zu Haupträumen.
Mit Hilfe dieser werden wir dann genauere Aussagen zur Trigonalisierung schaffen. In ℓ6 wurde diese bereits gewonnen, falls eine Hauptvektorenkettenbasis vorliegt.

Zu einem Endomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(V,V) =: \mathrm{End}(V)$ mit einem Eigenwert $\lambda \in K$ hatten wir den Eigenraum

$$E(f;\lambda) := \{v \in V;\ f(v) = \lambda v\} = L(\{v;\ v \text{ EV von } f \text{ zum EW } \lambda\})$$

betrachtet, der von allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ aufgespannt wird.
Für $x \in E(f;\lambda)$ ist offenbar $f(x) = \lambda x \in E(f;\lambda)$, d.h. der Unterraum $U := E(f;\lambda)$ hat die Eigenschaft, dass $f(U) \subseteq U$. In Worten: U wird mit f nach U abgebildet.

10.1. **Def. (invarianter Unterraum):** Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, $U \subseteq V$ Unterraum.
U heißt *f-invariant*, wenn $f(U) \subseteq U$. [Dann ist $f|_U \in \mathrm{End}(U)$.]

10.2. **Bsp.:** die Eigenräume von f sind f-invariant, aber auch V und $\{0\}$.

10.3. **Ziel:** Zu gegebenem $f \in \mathrm{End}(V)$ wollen wir V zerlegen in Unterräume $U_1, \dots, U_m$,
falls $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ gilt,
d.h. so, dass
(i) $U_1 + \dots + U_m = V$
(ii) $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$ für alle $i,j = 1,\dots,m$ mit $i \neq j$.

und darüberhinaus so, dass (iii) alle Räume U_i f-invariant sind, d.h. $f(U_i) \subseteq U_i$, $i = 1,\dots,m$,
(iv) diese Zerlegung "möglichst fein" (= nicht weiter zerlegbar) ist.

Def. Hauptvektor aus 6: $f \in End(V)$, sei λ EW von f

x heißt HV m-ter Stufe, falls

$$\left\{ \begin{array}{ll} x \in V \text{ mit} & (f - \lambda id_V)^{m-1}(x) \neq 0 \\ \text{aber} & \underbrace{(f - \lambda id_V)}_{\text{Polynom } T-\lambda \in K[T] \text{ in } f \text{ ausgewertet}}{}^m (x) = 0 \end{array} \right.$$

d.h. $x \in \ker (f - \lambda id_V)^m \setminus \ker(f - \lambda id_V)^{m-1}$

$\ulcorner g^0 = id_V \lrcorner$

insb. EV ist HV 1. Stufe

Warum ist Mipo(f) eindeutig bestimmt?

" " p mit min. Grad, normiert, $p(f) = 0$, eind. best.?

$\ulcorner$ Wären $T^m + q_1(T)$ und $T^m + q_2(T)$ derart,

d.h. $f^m + q_1(f) = 0$ und $f^m + q_2(f) = 0$,

m minimal, q_1, q_2 vom Grad $< m$,

dann wäre $q_1 - q_2 \in K[T]$ vom Grad $< m$

also $T^m + q_1(T) - (T^m + q_2(T))$ vom Grad $< m$

und $(q_1 - q_2)(f) = f^m + q_1(f) - f^m - q_2(f) = 0$,

$\lightning$ zur minimalen Wahl von m. $\lrcorner$

Gibt es etwa zu f eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$ aus EVen, so wären die $U_i := L(x_i) = Kx_i$ für $i=1,\dots,n$ eine solche "feine" Zerlegung des Raumes.
Solche Zerlegungen in invariante Unterräume liefern dann auch "einfache" Matrixdarstellungen für f, also Normalformen von f.
Um solche Zerlegungen zu erhalten, betrachten wir Polynome in f:

10.4. **Lemma:** Zu jedem Endo $f \in End(V)$ existiert ein Polynom $p \in K[T]$ mit $p \neq 0$, aber $p(f) = 0$
(p ist nicht das Nullpolynom, aber $p(f)$ der Nullendomorphismus von V).

Bew.: Zu f betrachten wir die Endos $f^0 = id_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f\circ f, \dots \in End(V)$.
Ist $\dim(V) = n$, so ist $\dim(End(V)) = n^2$. Somit sind die n^2+1 Elemente $f^0, f^1, \dots, f^{n^2}$ von $End(V)$ linear abhängig. Also ex. $\alpha_0,\dots,\alpha_{n^2} \in K$, nicht alle $=0$, so dass $\alpha_0 f^0 + \alpha_1 f^1 + \dots + \alpha_{n^2} f^{n^2} = 0$. Damit gilt für das Polynom
$p(T) := \alpha_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_{n^2} T^{n^2}$ die Behauptung. □

Unter allen Polynomen $p \in K[T]\setminus\{0\}$, für die zu einem festen $f \in End(V)$ die Gleichung $p(f) = 0$ gilt, gibt es ein nicht triviales von minimalem Grad. Es ist bis auf Normierung eindeutig bestimmt.

10.5. **Def.:** Sei $f \in End(V)$. Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $p \in K[T]\setminus\{0\}$ minimalen Grades mit $p(f) = 0$ heißt Minimalpolynom zu f.
Wir bezeichnen es mit Ψ_f. Kurzbezeichnung: Mipo(f).

10.6. **Bem.:** Abgesehen von dem uninteressanten Fall $V = \{0\}$ gilt stets $\deg(\Psi_f) \geq 1$.
Wir wollen ab jetzt den Fall $V = \{0\}$ ausschließen.

10.7. **Bsp.:** Der Endo $f \in End(\mathbb{R}^2)$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$, hat das Minimalpolynom
Mipo$(f) = T^2 + 1$, bzw. schreiben $\Psi_f(T) = \underline{T^2+1}$,
denn $\Psi_f(f) = f^2 + 1$ hat die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$,
und kein Polynom vom Grad 1 kann Mipo sein: Wäre $\Psi_f(T) = T + \alpha \in \mathbb{R}[T]$ mit $\Psi_f(f) = 0$, so wäre $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(T+\alpha)\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}}} = 0$, was nicht sein kann.

Bsp. zur Mipo-Bestimmung:

Sei $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. $n=2$.

$\rightsquigarrow$ Bilden Potenzen $F^0, F^1, F^2, \dots$

Finden nichttriv. LK von $\underline{F^0, F^1, \dots, F^{n^2} = F^4}$, die $=0$ ergibt, d.h.

$$\alpha_0 \underbrace{F^0}_{=I_2} + \alpha_1 \underbrace{F^1}_{=F} + \alpha_2 F^2 + \alpha_3 F^3 + \alpha_4 F^4 = 0$$

gesucht $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ $\rightsquigarrow$ 5 Unbest.

die Glg. $\rightsquigarrow$ $\underbrace{\text{4 lin. Glgn.}}$

$\rightarrow$ nichttriv. lösbar

---

z.B. $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$F^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad F^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \underbrace{F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_2 = F^0}$$

$$F^2 - I_2 = 0$$

$$\underbrace{(T^2 - 1)}_{\uparrow}(F) = 0$$

$$\rightsquigarrow \mu_F(T) = T^2 - 1$$

L10
-3-

Zu $f \in End(V)$ haben wir das Mipo als normiertes Polynom $\Psi_f \neq 0$ kleinsten Grades mit $\Psi_f(f) = 0$ definiert. Man kann sich überlegen, welche Beziehung Ψ_f zu allen Polynomen p mit $p(f) = 0$ hat, und wie die Teiler von Ψ in Verbindung mit f-invarianten Unterräumen von V stehen:

10.8. **Lemma:** Sei $f \in End(V)$ mit Mipo Ψ_f. Betrachte die Menge
$\mathcal{J}(f) := \{p \in K[T];\ p(f) = 0\}$ von Polynomen, die f "annulieren".
(Der Buchstabe $\mathcal{J}$ soll für "Ideal" stehen.) Dann gelten:
(i) Für alle $p \in \mathcal{J}(f)$ ist Ψ_f Teiler von p. ($\sim p$ ist Vielf. von Ψ_f)
(ii) Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, $f' := f_{|U} \in End(U)$ und Ψ' das Mipo von f', so ist Ψ' ein Teiler von Ψ.
(iii) Für jedes Polynom $p \in K[T]$ ist $\ker(p(f))$ ein f-invarianter UR von V.
(iv) Ist $\Psi = p_1 p_2$ mit normierten teilerfremden Polynomen p_1, p_2, mit p_1, p_2 nicht konstant (d.h. p_1, p_2 sind echte Teiler von Ψ), ist $U_i := \ker(p_i(f))$ für $i = 1, 2$, so ist $V = U_1 \oplus U_2$ und p_i das Mipo von $f_i := f_{|U_i}$, $i = 1, 2$.

10.9. Bsp.: Sei $V = \mathbb{R}^4$, $f \in End(V)$ geg. durch die Matrix $F = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Das Minimalpolynom lautet $\Psi_f(T) = (T-2)(T+1)^2$,
denn rechnen Sie selbst nach, dass $\Psi_f(F) = (F - 2 \cdot I_4) \cdot (F + I_4)^2 = 0$ (=Nullmatrix).
Somit sind $p_1(T) = T-2$, $q(T) = T+1$ zwei irreduzible Faktoren von Ψ_f, beide Grad 1.
Mit $p_2(T) = q^2(T)$ erhalten wir, da $\Psi = p_1 p_2$, die Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ mit den Kernen $U_1 = \ker(p_1(f)) = \ker(F - 2I_4) = L(e_1)$ und $U_2 = \ker(p_2(f)) = \ker((F+I_4)^2)$ $= L(e_1 + e_2, e_3, e_4)$, da $(F+I_4)^2 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10.10. **Bew.:** (i): Sei $p \in \mathcal{J}(f)$. Nach Satz 8.3 können wir mit Rest durch Ψ teilen, also ist $p(T) = q(T) \cdot \Psi(T) + r(T)$ mit Polynomen q, r, wobei $\deg(r) < \deg(\Psi)$.
vgl. Bew. von 9.2
Da $p(f) = \Psi(f) = 0$, muss auch $r(f) = 0$ sein. Dann muss aber $r(T) = 0$ sein, d.h. das Nullpolynom, da ja Ψ als Polynom minimalen Grades gewählt war.
(ii): Da U f-invariant ist, ist $f' := f_{|U} \in End(U)$. Ferner folgt
$\Psi(f)_{|U} = \Psi(f_{|U}) = \Psi(f')$, und wegen $\Psi(f) = 0$ also auch $\Psi(f') = 0$.
Damit ist $\Psi \in \mathcal{J}(f')$, und nach (i) damit Ψ' ein Teiler von Ψ.

(iii): Sei $u \in \ker(p(f))$. Dann ist $p(f)(f(u)) \overset{p(f)\circ f = f\circ p(f),\ \text{vgl. } 7.17}{=} (f p(f))(u) = f(\underbrace{p(f)(u)}_{=0}) = f(0) = 0$, also auch $f(u) \in \ker(p(f))$, d.h. $\ker(p(f))$ ist f-invariant.

(iv): • Da p_1, p_2 teilerfremd sind, gibt es nach Satz 8.11 (Bézout) Polynome s_1, s_2 mit $1 = s_1(T)p_1(T) + s_2(T)p_2(T)$ und somit auch $id_V = s_1(f)p_1(f) + s_2(f)p_2(f)$.
Setzen wir für $v \in V$: $u_1 := s_2(f)p_2(f)(v)$, $u_2 := s_1(f)p_1(f)(v)$,
so ist $p_1(f)(u_1) = p_1(f)s_2(f)p_2(f)(v) \underset{\text{kommutiert, vgl. } 7.17}{=} s_2(f)p_1(f)p_2(f)(v) = s_2(f)\chi(f)(v) = 0$
und

$$p_2(f)(u_2) = p_2(f)s_1(f)p_1(f)(v) = s_1(f)p_2(f)p_1(f)(v) = s_1(f)\chi(f)(v) = 0,$$

d.h. $u_i \in U_i = \ker(p_i(f))$ für $i = 1,2$. Ferner ist

$$v = id_V(v) = (s_1(f)p_1(f) + s_2(f)p_2(f))(v) = s_1(f)p_1(f)(v) + s_2(f)p_2(f)(v) = u_1 + u_2 \in U_1 + U_2.$$

Somit ist $V = U_1 + U_2$.

• Die Summe $U_1 + U_2$ ist also auch direkt, d.h. die beiden Räume sind komplementär:
Ist nämlich $u \in U_1 \cap U_2 = \ker(p_1(f)) \cap \ker(p_2(f))$, so folgt mit derselben Rechnung wie eben: $u = s_1(f)p_1(f)(u) + s_2(f)p_2(f)(u) = s_1(f)(0) + s_2(f)(0) = 0$.
Damit ist $V = U_1 \oplus U_2$ gezeigt.

• Jetzt zeigen wir noch die Aussage über die Minimalpolynome:
Als Kerne von Polynomen in f sind die U_i f-invariant nach (iii).
Damit ist $f_i \in End(U_i)$. Wegen $U_i = \ker(p_i(f))$ ist $p_i(f_i) = 0$, d.h. $p_i \in \mathcal{I}(f_i)$.
Somit ist das Mipo μ_i von f_i nach (i) Teiler von p_i für $i = 1,2$.
Ferner ist $\mu_1\mu_2 \in \mathcal{I}(f)$, denn für jedes entsprechend unserer Zerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ dargestellte $v = u_1 + u_2$ gilt

$$\mu_1(f)\mu_2(f)(v) = \mu_1(f)\underbrace{\mu_2(f_2)(u_2)}_{=0} + \mu_2(f)\underbrace{\mu_1(f)(u_1)}_{=0} = 0.$$

Somit ist auch μ ein Teiler von $\mu_1\mu_2$. Wegen $\mu = p_1p_2$ haben wir also: $\mu = p_1p_2$ teilt $\mu_1\mu_2$, und $\mu_1\mu_2$ teilt p_1p_2.
Da alle Polynome normiert sind und noch μ_i Teiler von p_i $(i=1,2)$, folgt notwendig $p_i = \mu_i$ für $i = 1,2$. → [... vgl. Tutorium ...] □

Die Überlegungen im Beweis des Lemmas liefern nun eine erste Zerlegung des Raumes V in invariante Unterräume. Diese ist noch grob, d.h. wir erwarten, dass die U_i weiter zerlegbar sind (s. L11).

10.11 Satz: Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Sein Minimalpolynom Ψ besitze die Zerlegung (laut Satz 9.10) $\Psi = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_i}$ mit p.w.v. normierten irreduziblen Polynomen $p_i \in K[T]$ und Exponenten $\nu_i \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Unterräume $U_i := \ker(p_i(f)^{\nu_i})$, $i=1,\dots,m$:

(i) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, (ii) die U_i sind f-invariant, d.h. $f(U_i) \subseteq U_i$, $i=1,\dots,m$,

(iii) $p_i^{\nu_i} \in K[T]$ ist Minimalpolynom zu $f_i := f_{/U_i} \in \mathrm{End}(U_i)$,

(iv) sind $(u_{i1},\dots,u_{im_i})$ Basen von U_i für $i=1,\dots,m$, so ist insg. $(\underbrace{u_{11},\dots,u_{1m_1}}_{\text{Basis von } U_1}, \underbrace{u_{21},\dots,u_{2m_2}}_{\text{Basis von } U_2},\dots,\underbrace{u_{m1},\dots,u_{mm_m}}_{\text{Basis von } U_m})$ Basis von V.

Bezüglich dieser Basis hat f eine Matrixdarstellung der Form $\begin{pmatrix} F_1 & & & 0 \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_m \end{pmatrix}$ mit $m_i \times m_i$-Matrizen F_i, $i=1,\dots,m$.

Bew.: Ist in der Darstellung $\Psi = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\nu_i}$ für das Mipo Ψ gerade $m=1$, ist nichts z.z. Sei also OE $m \geq 2$. Dann zerlegen wir $\Psi = p_1^{\nu_1} \cdot (\prod_{i=2}^{m} p_i^{\nu_i})$ und erhalten nach Lemma 10.8 eine Zerlegung $V = U_1 \oplus U'$ von V in f-invariante URe $U_1 := \ker(p_1(f)^{\nu_1})$ und $U' := \ker(\prod_{i=2}^{m} p_i(f)^{\nu_i})$ mit zugehörigen Mipos $\Psi_1 := p_1^{\nu_1}$ und $\Psi_2 := \prod_{i=2}^{m} p_i^{\nu_i}$.
Ist $m=2$, fertig. Ist $m>2$, so wenden wir den gleichen Prozess an auf U' und $f' := f_{/U'} \in \mathrm{End}(U')$ mit Mipo $\prod_{i=2}^{m} p_i^{\nu_i}$ und spalten wieder einen f-invarianten Unterraum $U_2 := \ker(p_2(f)^{\nu_2})$ ab. Dieser Prozess wird solange iteriert, bis die volle Zerlegung erhalten ist. □

10.12 Bem.: Zerfällt das Mipo in lauter verschiedene Linearfaktoren ~~(etwa wenn $K=\mathbb{C}$)~~, d.h. hat Ψ die spezielle Zerlegung $\Psi_f(T) = \prod_{i=1}^{m}(T-\lambda_i)$, so liefert Satz 10.11. als U_i die Eigenräume $U_i = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_V) = E(f;\lambda_i)$, $i=1,\dots,m$.
Dies liefert den in LA I, L20.10, betrachteten Fall des diagonalisierbaren Endos, und die in Satz 10.11 angegebene Matrix bekommt Diagonalgestalt.