Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

ℓ11: f-zyklische Unterräume - Teil A

Stichworte: Spezialfall Mipo $\Psi = p^r$, (verallgemeinerter) Hauptraum, f-zyklische Unterräume, Dimension und Unzerlegbarkeit f-zyklischer Unterräume

---

Sei $V \neq \{0\}$ ein K-VR. Aus ℓ10:

Zu gegebenem $f \in \mathrm{End}(V)$ haben wir V zerlegt in Unterräume $U_1, \dots, U_m$, falls $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ gilt, wobei diese Zerlegung des Raumes V aus der Zerlegung $\Psi(T) = \prod_{i=1}^m p_i^{\nu_i}$ des Mipos Ψ nach Potenzen von irreduziblen Faktoren entstanden ist. Auf jedem einzelnen invarianten Unterraum U_i induziert f den Endomorphismus $f_i := f_{|U_i} \in \mathrm{End}(U_i)$, dessen Minimalpolynom Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, nämlich $p_i^{\nu_i}$. Diese Situation betrachten wir in Kapitel ℓ11 genauer "mit der Lupe". Wählen dafür die spezielle Voraussetzung für einen K-VR U, der weiter zerlegt werden soll:

11.1. Vor.: Sei $f \in \mathrm{End}(U)$ mit Mipo $\Psi(T) = p(T)^r$, wobei $p(T) = T^k + a_{k-1}T^{k-1} + \dots + a_0$ ein irreduzibles normiertes Polynom vom Grad k in $K[T]$ sei, und sei $r \geq 1$.

Wir bezeichnen:

$$g := p(f) = f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \dots + \alpha_1 f + \alpha_0 \, \mathrm{id}_U$$

und $H_j := \ker(g^j) = \ker(p(f)^j)$, $j = 0, 1, \dots$

$g := p(f)$

11.2. Def.: die Unterräume H_j heißen (verallgemeinerte) Haupträume.

11.3. Bem.: Es ist dann $g^r = p(f)^r = \Psi(f) = 0$, also $H_r = U$. (g ist nilpotent, vgl. Ü)

11.4. Konstruktion: Wir definieren nun zu jedem $u \in U$ den f-invarianten Unterraum

$$V(u) := L(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{k-1}(u), g(u), gf(u), gf^2(u), \dots, gf^{k-1}(u), g^2(u), g^2 f(u), g^2 f^2(u), \dots).$$

Da $f, g \in \mathrm{End}(U)$ ist $V(u) \subseteq U$.

Betrachte auch $W(u) := L(\{f^j(u);\ j = 0, 1, \dots, rk-1\})$.

Diese Räume $V(u)$ $(=W(u))$, genannt f-zyklische Unterräume, haben folgende Eigenschaften:

11.5 <u>**Lemma:**</u> (i): $V(u) = L(\{g^j f^i(u);\ i=0,\dots,k-1;\ j=0,1,\dots,r-1\})$,
d.h. wir brauchen nur g-Potenzen bis $r-1$ zu betrachten,
(ii): es ist $W(u) = V(u)$ ein f-invarianter Unterraum von U,
(iii): Ist $u \in H_m$ und $u \notin H_{m-1}$, so ist $\dim V(u) = mk$, $m=1,\dots,r$.
(iv): Es gibt ein $u \in U$ mit $\dim V(u) = rk = \deg(\Psi)$, wo $\Psi = \mathrm{Mipo}(f)$ laut Vor.,
(v): Jeder dieser Räume ist unzerlegbar, d.h. kann <u>nicht</u> weiter als direkte Summe von nichttrivialen f-invarianten Räumen dargestellt werden.

<u>Bew.:</u> (i): Es ist $g^r = p(f)^r = \Psi(f) = 0$.

(ii): Zeigen erst $W(u) \overset{!}{=} V(u)$. „$\supseteq$": Sei $w \in V(u)$, etwa $w = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij} g^j f^i(u)$ mit $\lambda_{ij} \in K$. Betrachten dazu passend das Polynom
$q(T) := \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij}\, p(T)^j T^i$. Einsetzen von f liefert sofort $w = q(f)(u)$.
Nun ist q ein Polynom vom Grad $\leq k(r-1)+k-1 = rk-1$ und hat somit eine Darstellung $q(T) = \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l T^l$, damit ist $w = q(f)(u) = \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l f^l(u) \in W(u)$.
„$\subseteq$": Sei $w \in W(u)$, etwa $w = \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l f^l(u)$, setzen wiederum
$q(T) := \sum_{l=0}^{rk-1} \sigma_l T^l \in K[T]$ und erhalten $w = q(f)(u)$. Nun ist p ein normiertes Polynom vom Grad k, können es also durch sukzessive Division mit Rest durch p das Polynom q darstellen als $q(T) = R_0(T) + p(T)R_1(T) + p(T)^2 R_2(T) + \dots + p(T)^{r-1} R_{r-1}(T)$, wobei die "Restpolynome" $R_j \in K[T]$ einen Grad $\leq k-1$ haben, also von der Form $R_j(T) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij} T^i$ sind. Einsetzen von f liefert dann mit $p(f) = g$:
$$q(f) = R_0(f) + gR_1(f) + \dots + g^{r-1}R_{r-1}(f) = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ij}\, g^j f^i,$$
woraus $w = q(f)(u) \in V(u)$ folgt.

<u>Zur f-Invarianz von $V(u)$:</u> Die Erzeugenden $f^l(u)$, $l=0,\dots,rk-1$, von $W(u)=V(u)$ werden wieder nach $V(u)$ abgebildet; denn wegen $f(f^l(u)) = f^{l+1}(u)$ ist dies für $l < rk-1$ trivial, und für $l = rk-1$ erhalten wir mit gewissen $\beta_l \in K$:
$$f(f^{rk-1}(u)) = f^{rk}(u) = g^r(u) - \sum_{l=0}^{rk-1} \beta_l f^l(u) = 0 - \sum_{l=0}^{rk-1} \beta_l f^l(u) \in V(u)$$

(iii): Ist $u \in H_m$, so ist $g^m(u) = 0$ und somit für $j \geq m$, $i \geq 0$:
$$g^j f^i(u) = f^i g^{j-m} \underbrace{g^m(u)}_{=0} = f^i g^{j-m}(0) = 0.\ \text{Also ist } V(u) = L(\{g^j f^i(u);\ i=0,\dots,k-1,\ j=0,\dots,m-1\})$$
Nach Lemma <u>10.8(ii)</u> hat $\Psi' = \mathrm{Mipo}(f') = \mathrm{Mipo}(f|_{V(u)})$ die Form $p(T)^{r'}$ mit einem $r' \leq r$.

Es ist aber auch $r' \geq m$, denn für $r' \leq m-1$ wäre sonst $p(f')^{m-1} = g^{m-1}|_{V(u)} = 0$ und somit insb. $g^{m-1}(u) = o$, d.h. $u \in H_{m-1}$, was ausgeschlossen war.

Nehmen wir nun an, die in ⊛ notierten Erzeugenden von $V(u)$ wären abhängig. Dann gibt es nichttriviale Koeffizienten λ_{ts} mit $\sum_{t=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{ts} g^t f^s(u) = o$. Wir bilden das Polynom $q(T) := \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{ts} p(T)^t T^s \in K[T]$, $q \neq 0$, vom Grad $< mk \leq \deg(\psi')$. Dafür ist dann $q(f)(u) = \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{ts} g^t f^s(u) = o$. Dann gilt aber für alle $i,j \geq 0$: $q(f) g^j f^i(u) = g^j f^i q(f)(u) = o$, d.h. $q(f)$ annuliert ganz $V(u)$. Somit ist $q(T) \in \mathcal{J}(f')$, wird also von $\psi' = \mathrm{Mipo}(f_{|V(u)})$ geteilt. Das geht aber nur, wenn $q(T) = 0$ ist, da $\deg(q) < \deg(\psi')$ ist.
Dieser Widerspruch zeigt die Unabhängigkeit.

(iv): Es gen. z.z., dass wenigstens für ein u in (iii) bereits $m = r$ eintritt. Nehmen wir an, dass für jedes u schon $u \in H_{r-1}$ gilt. Dann ist also $g^{r-1}(u) = o$ für alle $u \in U$, d.h. $p(T)^{r-1} \in \mathcal{J}(f)$, was wegen $\psi = p^r$ ausgeschlossen war.

(v): • Seien V_1, V_2 zwei nichttriviale Teilräume von $V(u)$. Nach Lemma 10.8.(ii) gehören dazu die Mipos $\psi_1(T) = p(T)^{r_1}$ und $\psi_2(T) = p(T)^{r_2}$. Wir betrachten die Räume $W_i := g^{r_i - 1}(V_i) \subseteq V_i$ für $i = 1,2$. Sie sind selbst f-invariant, da $f(W_i) = f(g^{r_i-1} V_i) = g^{r_i-1} f(V_i) \subseteq g^{r_i-1} V_i = W_i$, und nach dem in (iv) angewendeten Schluss bestehen sie nicht nur aus dem Nullvektor o.

• Bestimmen wir ihre Mipos φ_i: Als invarianter Unterraum von U hat W_i nach Lemma 10.8(ii) ein Mipo der Form $\varphi_i = p^{m_i}$ für ein $0 \leq m_i \leq r$. Da W_i nicht $\{o\}$ ist, muss $m_i \geq 1$ sein, und wegen $g W_i = g(g^{r_i-1} V_i) = g^{r_i} V_i = \{o\}$ ist $m_i \leq 1$, d.h. $\varphi_i = p$ für $i = 1,2$.

• Für ein beliebiges $w \in W_i$, $w \neq o$, enthält W_i den Raum $V(w)$, und nach (iii) (mit $m=1$) hat dieser die Dimension k. Damit haben wir $W_i \subseteq V$ und $\dim W_i \geq k$ für $i = 1,2$. Andererseits haben wir eben gezeigt, dass $W_i \subseteq \ker g_{|V(u)}$ ist, und somit auch $W_1 + W_2 \subseteq \ker g_{|V(u)}$.

• Bei ⊛ hatten wir $\{g^j f^i(u);\ i=0,\dots,k-1;\ j=0,\dots,m-1\}$ als Basis von $V(u)$ erkannt. Hier liest man sofort ab, dass $\ker g_{|V(u)} = L(\{g^{m-1} f^i(u);\ i=0,\dots,k-1\})$ ist, und somit ist $\dim(W_1+W_2)\le k$.
• Nach der allgemeinen Dimensionsformel $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)$ erhalten wir also $\dim(W_1\cap W_2)\ge k+k-k=k$, und somit wegen $W_i\subseteq U_i$ dann $\dim(V_1\cap V_2)\ge k$.
• Dies bedeutet: $V(u)$ kann zwar durchaus verschiedene f-invariante Unterräume enthalten, aber je zwei haben mindestens einen k-dimensionalen Unterraum gemeinsam. Damit kann $V(u)$ <u>nicht</u> in invariante <u>direkte</u> Summanden zerlegt werden. □

11.6 <u>Bem.:</u> i) Aus 11.5 (iv) folgt insb. $\dim(U)\ge\deg(\Psi)$, d.h. der Grad des Mipos ist höchstens die Dimension des Raumes, dies überträgt sich auch mit Satz 10.11 auf die allgemeine Situation.
(ii) Die in Lemma 11.5 untersuchten Räume $V(u)$ sind die Bausteine, aus denen wir nun eine Zerlegung des Raumes U unter Voraussetzung 11.1 gewinnen wollen. Es liegt nun nahe, eine Zerlegung so zu versuchen, dass man mit einem $u_1\in U$ beginnt, dazu den Raum $V(u_1)$ bildet, dann ein $u_2\in U\setminus V(u_1)$ wählt, dazu $V(u_2)$ bildet, usw.
<u>Es tauchen folgende Probleme auf:</u>
* Wie muss man u_{i+1} wählen, damit $V(u_{i+1})\cap(V(u_1)+\dots+V(u_i))=\{0\}$, d.h. damit die Summe <u>direkt</u> wird?
* Wie stellt man sicher, dass man so ganz U ausschöpft?
(iii) In Lemma 11.5 hatten wir gesehen, dass für alle $u\in U$ gilt, dass $\dim V(u)=mk$ für ein von u unabhängiges $m\in\{0,1,\dots,r\}$, wobei für gewisse u sogar $\dim V(u)=rk$ eintritt. Wir konstruieren nun die u_i so, dass wir stets versuchen, möglichst <u>große</u> Räume zu erhalten.