Vorlesung Lineare Algebra II — SoSe'20 hhu

K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

l11: f-zyklische Unterräume – Teil B

Stichworte: Algorithmus zur Ausschöpfung mit f-zyklischen Unterräumen, Beweis der Korrektheit und Terminierung des Algorithmus

---

Sei $U \neq \{0\}$ endl.dim. K-VR. Wir erinnern an die Grundvoraussetzung von l11:

11.1. **Vor.:** Sei $f \in \mathrm{End}(U)$ mit Mipo $\Psi(T) = p(T)^r$, wobei $p(T) = T^k + \alpha_{k-1}T^{k-1} + \ldots + \alpha_0$ ein irreduzibles normiertes Polynom vom Grad k in $K[T]$ sei, und sei $r \geq 1$.

Wir bezeichnen: $g := p(f) = f^k + \alpha_{k-1} f^{k-1} + \ldots + \alpha_1 f + \alpha_0 \,\mathrm{id}_U$

$g := p(f)$

und $H_j := \ker(g^j) = \ker(p(f)^j)$, $j = 0, 1, \ldots$

11.2. **Def.:** die Unterräume H_j heißen (verallgemeinerte) Haupträume.

11.3. **Bem.:** Es ist dann $g^r = p(f)^r = \Psi(f) = 0$, also $H_r = U$.

11.4. **Konstruktion:** Wir definieren nun zu jedem $u \in U$ den f-invarianten Unterraum
$$V(u) := L(u, f(u), f^2(u), \ldots, f^{k-1}(u), g(u), gf(u), gf^2(u), \ldots, gf^{k-1}(u), g^2(u), g^2 f(u), g^2 f^2(u), \ldots).$$
Da $f, g \in \mathrm{End}(U)$ ist $V(u) \subseteq U$.

$\rightsquigarrow$ Betrachte auch $W(u) := L(\{f^j(u);\ j = 0, 1, \ldots, \underbrace{rk-1}_{=\deg\Psi - 1}\})$.

Wir haben $V(u) = W(u)$. Diese Unterräume heißen f-zyklisch. Haben gezeigt:

11.5 **Lemma:** (i): $V(u) = L(\{g^j f^i(u);\ i = 0, \ldots, k-1;\ j = 0, 1, \ldots, r-1\})$,
d.h. wir brauchen nur g-Potenzen bis $r-1$ zu betrachten,

verallg. HV

(ii): es ist $W(u) = V(u)$ ein f-invarianter Unterraum von U,

u HV m-ter Stufe $\rightsquigarrow$ (iii): Ist $u \in H_m$ und $u \notin H_{m-1}$, so ist $\dim V(u) = mk$, $m = 1, \ldots, r$.

(iv): Es gibt ein $u \in U$ mit $\dim V(u) = rk = \deg(\Psi)$, wo $\Psi = \mathrm{Mipo}(f)$ laut Vor.,

(v): Jeder dieser Räume ist unzerlegbar, d.h. kann nicht weiter als direkte Summe von nichttrivialen f-invarianten Räumen dargestellt werden.

Bsp.: A 1 Bl. 6: $\leadsto f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leadsto \chi_A(T) = \underbrace{(T-2)^2}\cdot\underbrace{(T-1)^1}$$

Grobzerl.: in invar. UR:

$$U_1 := \ker\underbrace{(A-2I)}^2 = \ker\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}} = \underline{L(e_1, e_2)}$$

$$U_2 := \ker(A+I) = \dots = \underbrace{L\left(\begin{pmatrix} -16 \\ -22 \\ 9 \end{pmatrix}\right)}_{b} \leftarrow \text{1-dim.}$$

$\leadsto$ mit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, b)$ haben

$$_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ -1 & 3 & \\ \hline & & -1 \end{array}\right) \quad \overset{\text{Wunsch:}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ \hline & & -1 \end{array}\right)$$

Feinzerl., nur von U_1 möglich:

$$\tilde{f} = f|U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\tilde{f}}(T) = (T-2)^2$$

Situation: $\to$ $\chi(T) = p(T)^r$ in $\ell 11$ mit $r = 2$, $p(T) = T-2$

Haupträume: $H_0 = \{0\}$

ER $\leadsto$ $H_1 = \ker g = \ker p(f) = \ker(f - 2\,\mathrm{id})$

$$= \ker(A - 2I) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{L(e_1+e_2)}}$$

HV 2-ter St. $\leadsto$ $H_2 = \ker\underbrace{(A-2I)^2}_{\chi_f(A)=0} = \mathbb{R}^2$

HV m-ter Stufe: $x_m \in H_m \setminus H_{m-1}$ $\leftarrow$ vgl. $\ell 6$

$\chi = (T-2)^2 \rightsquigarrow p = T-2,\ r = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Algo 11.8</u>: 1.) $W := \{0\},\ j := 2,\ i := 0$

2.) $H_2 \not\subseteq H_1 + W$

$\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \not\subseteq L(e_1 + e_2) + \{0\}$

setze $i := 1$, etwa $u_{12} = e_1 \in H_2 \setminus (H_1 + W)$

setze $W := W + V(u_{12}) = V(e_1)$

$= L(e_1, f^1(e_1))$

$= L(e_1, e_1 - e_2) = \mathbb{R}^2$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\mathbb{R}^2 = V(e_1)}} \rightsquigarrow 2.)$

2.) $H_2 \subseteq H_1 + W$

$\mathbb{R}^2 \subseteq H_1 + \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ ✓ $\rightsquigarrow m_2 := i = 1 \rightarrow 3.)$

3.) setze $j := 1,\ i := 0 \rightsquigarrow 2.)$

2.) $H_1 \subseteq H_0 + W$

$\Leftrightarrow H_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ✓ $\rightsquigarrow m_3 := i = 0 \rightarrow 3.)$

3.) $j = 1$ ja ✓ <u>Ende</u>

Haben: $\mathbb{R}^2 = V(e_1) = L(e_1, e_1 - e_2)$

$\underline{\underline{e12}}$ $\rightsquigarrow$ Basis $\mathcal{B} = (g(e_1), e_1)$, haben

$\underline{{}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

ℓ 11-B

-2-

11.6. **Bem.:** i) Aus 11.5.(iv) folgt insb. $\dim(U) \geq \deg(\Psi)$,
d.h. der Grad des Mipos ist höchstens die Dimension des Raumes; dies überträgt sich auch mit Satz 10.11 auf die allgemeine Situation.

(ii) Die in Lemma 11.5 untersuchten Räume $V(u)$ sind die Bausteine, aus denen wir nun eine Zerlegung des Raumes U unter Voraussetzung 11.1 gewinnen wollen. Es liegt nun nahe, eine Zerlegung so zu versuchen, dass man mit einem $u_1 \in U$ beginnt, dazu den Raum $V(u_1)$ bildet, dann ein $u_2 \in U \setminus V(u_1)$ wählt, dazu $V(u_2)$ bildet, usw.

11.7. Es tauchen folgende Probleme auf:

* Wie muss man u_{i+1} wählen, damit $V(u_{i+1}) \cap \big(V(u_1) + \ldots + V(u_i)\big) = \{0\}$, d.h. damit die Summe direkt wird?

* Wie stellt man sicher, dass man so ganz U ausschöpft?

(iii) In Lemma 11.5 hatten wir gesehen, dass für alle $u \in U$ gilt, dass $\dim V(u) = mk$ für ein von u unabhängiges $m \in \{0, 1, \ldots, r\}$, wobei für gewisse u sogar $\dim V(u) = rk$ eintritt. Wir konstruieren nun die u_i so, dass wir stets versuchen, möglichst große Räume zu erhalten.

Dies liefert den folgenden

11.8. **Algorithmus:** Vorausgesetzt wie in Vor. 11.1: $f \in \mathrm{End}(U)$, Mipo $\Psi = p(T)^r$

$H_r = U$ ~ mit $p \in K[T]$ irreduzibel, $\deg(p) = k$, $g := p(f)$, $H_j := \ker g^j$, $j = r, r-1, \ldots, 2, 1, 0$.

Schritt 1.): Setze $W := \{0\}$, $j := r$, $i := 0$, weiter bei 2.)

Schritt 2.): • Sofern $H_j \not\subseteq H_{j-1} + W$, setze $i := i+1$, wähle $u_{ij} \in H_j \setminus (H_{j-1} + W)$ und setze $W := W + V(u_{ij})$, weiter bei 2.).
• Falls $H_j \subseteq H_{j-1} + W$, setze $m_j := i$, weiter bei 3.).

Schritt 3.): • Falls $j > 1$ setze $j := j-1$, $i := 0$, weiter bei 2.).
• Falls $j = 1$ Ende. (Gib aus: die m_j und u_{ij} für $j = 1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, m_j$)

[Im Schritt 2.) werden solange u_{ij} im Hauptraum $H_j \setminus (H_{j-1} + W)$ gewählt, bis es "nicht mehr geht".]

Mit diesem Algorithmus wird die gewünschte Ausschöpfung von U erhalten:

11.9. Satz: Mit den aus Algorithmus 11.8 gewonnenen Zahlen m_j, $j=1,\dots,r$, und Vektoren u_{ij} gilt

$$\boxed{U = \bigoplus_{j=1}^{r} \bigoplus_{i=1}^{m_j} V(u_{ij}).}$$

Damit ist eine Zerlegung von U in unzerlegbare f-invariante Räume gefunden.

Bew.: Wir gewinnen bei jedem Durchgang ein u_{ij} und erweitern den schon erreichten Raum W zu $W + \underbrace{V(u_{ij})}_{\not\subseteq W \text{ nach Konstruktion}}$. Wir zeigen:

Beh. (i): Die Summe ist jeweils direkt. Das ganz am Ende erreichte W, es sei mit W_0 bezeichnet, ist dann direkte Summe, d.h. $W_0 = \bigoplus_{j,i} V(u_{ij})$.

Beh. (ii): $W_0 = U$, d.h. es wird ganz U erreicht.

Zu (ii): Da f auf U das Mipo $p(T)^r$ hat, ist $g^r = 0$, d.h. $H_r = U$.
Also gen. z.z., dass $H_r \subseteq W_0$, was wir induktiv tun:
Es ist $H_0 = \ker(g^0) = \ker(\mathrm{id}_U) = \{0\}$ und somit trivialerweise $H_0 \subseteq W_0$.
Sei nun für ein j, $1 \le j \le r$, die Aussage $H_{j-1} \subseteq W_0$ richtig. Damit ist am Ende der Stufe j des Algorithmus: $H_j \subseteq H_{j-1} + W \subseteq W_0 + W \subseteq W_0$, also auch $H_j \subseteq W_0$. Für $j=r$ liefert dies $U = H_r \subseteq W_0$, was zu zeigen war. ⌋

Zu (i): Zunächst betrachten wir die (verallg.) Haupträume/Kerne $H_j = \ker(g^j)$, $j = 0,1,\dots,r$.
Offenbar ist $H_0 = \{\vec{0}\} \subsetneqq H_1 \subsetneqq H_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq H_r = U$, wobei (nach Lemma 11.5(iv)) alle Inklusionen echt sind (d.h. haben jeweils $\subsetneqq$, nicht $\subseteq$).

Verfolgen wir, wie der Algorithmus die Räume W (nach und nach) aufbaut.
Wir beginnen mit $W = \{0\}$ und fügen bei jedem Schritt einen Summanden der Form $V(u_{ij})$ hinzu, wobei $u_{ij} \in \underbrace{H_j \setminus (H_{j-1} + W)}_{\text{HV } j\text{-ter Stufe}}$, $u_{ij} \notin W$
und wobei die j schwach monoton abnehmen.

* Nach dem 1. Schritt haben wir also $W=\{0\}+V(u_{1,i_r}) = V(u_{1,i_r})$, eine (nur aus einem Summanden bestehende) direkte Summe der Form $\bigoplus_\lambda V(u_\lambda)$.

* Betrachten wir nun den Schritt, der zur Wahl von u_{i_j} führt.
Nach Induktion können wir annehmen, dass wir $W+V(u)$ zu bilden haben, wobei $W=\bigoplus_{\lambda=1}^{\ell} V(u_\lambda)$ mit $u_\lambda \in H_{j-1}$, $\lambda=1,\dots,\ell$,

Vor. ⊗: und $u := u_{i_j} \in H_j$, $u \notin H_{j-1}$, und $u \notin W$.

Zu zeigen ist, dass $W \cap V(u)=\{0\}$, d.h. auch diese Summe ist direkt.
Sei $Y := W \cap V(u)$, $y\in Y$. Da W und $V(u)$ f-invariant sind, ist auch Y f-invariant. Y enthält somit den Raum $V(y)$, d.h. $Y \supseteq V(y)$. Ferner ist $u \notin W$, also $u \notin Y$ und somit $V(y) \subseteq Y \subsetneq V(u)$. Nach Lemma 11.5 (iii) ist wegen $u \in H_j \setminus H_{j-1}$ und $\dim V(u) = jk$ also $\dim V(y) < jk$.

Zu y gibt es ein m mit $y \in H_m \setminus H_{m-1}$, da $y \in W$, wonach Lemma 11.5 (iii) dann $\dim V(y) = mk$ gilt. Somit ist notwendig $m<j$, d.h. $y\in H_{j-1}$.

Beh. ⊕: Da $y \in Y$ beliebig war, ist somit $\boxed{Y \subseteq H_{j-1}}$

* War $j=1$, so ist jetzt $Y \subseteq H_0 = \{0\}$, d.h. $W \cap V(u)=\{0\}$, was z.z. war.

* Den Fall $j>1$ führen wir hierauf zurück.

• Zunächst bemerken wir, dass für $x \in X_j^{H_j}$ gilt:

Beh. ☒: $\underline{V(x) \cap H_{j-1} \subseteq g(V(x)) = V(g(x))}$.

⌜Denn mit einem geeigneten $s \geq j$ $(g^s(x)=0)$ ist
$$V(x) = L(\{g^\rho f^\sigma(x);\ \rho=0,\dots,s-1;\ \sigma=0,\dots,k-1\}),$$
wobei die notierten Elemente eine Basis bilden.

Damit erhalten wir eine Aufteilung in eine direkte Summe, nämlich
$$V(x) = L(\{g^\rho f^\sigma(x);\ \rho=0,\dots,\underline{s-j};\ \sigma=0,\dots,k-1\})$$
$$\oplus\ L(\{g^\rho f^\sigma(x);\ \rho=\underline{s-j+1},\dots,s;\ \sigma=0,\dots,k-1\}).$$

Diese zwei Summanden von $V(x)$ werden jetzt genauer untersucht: Welche Vektoren darin liegen in $H_{j-1} = \ker g^{j-1}$??

Wenden wir hierauf g^{j-1} an, so geht der erste Summand elementweise über in $L(\{g^{\varrho+j-1}f^{\sigma}(x);\ \varrho=0,\dots,s-j;\ \sigma=0,\dots,k-1\})$
$= L(\{g^{\varrho}f^{\sigma}(x);\ \varrho=j-1,\dots,s-1;\ \sigma=0,\dots,k-1\})$.
Da auch hier unabhängige Elemente stehen, ist hierauf g^{j-1} injektiv.
Im zweiten Summanden der direkten Summe erhalten wir nach Anwenden von g^{j-1} nur noch Terme der Form $g^{\varrho}f^{\sigma}(x)$ mit $\varrho \geq s$, die sämtlich verschwinden.
Somit ist $V(x)\cap H_{j-1} = L(\{g^{\varrho}f^{\sigma}(x);\ \varrho=s-j+1,\dots,s;\ \sigma=0,\dots,k-1\})$, und wegen $s\geq j$ ist hier stets $\varrho\geq 1$, d.h. $V(x)\cap H_{j-1} \subseteq g(V(x)) = V(g(x))$, womit $\boxtimes$ gezeigt ist.

Damit folgt insbesondere: $V(u)\cap H_{j-1} \subseteq V(g(u))$ und
$$W\cap H_{j-1} = \bigoplus_{\lambda} V(u_\lambda)\cap H_{j-1} \overset{\boxtimes}{\subseteq} \bigoplus_{\lambda} V(g(u_\lambda)) = g(W). \qquad (1)$$
Somit folgt aus $Y = W\cap V(u) \subseteq H_{j-1}$:
$$Y = Y\cap H_{j-1} = W\cap H_{j-1}\cap V(u)\cap H_{j-1} \overset{(1)}{\subseteq} g(W)\cap V(g(u)). \qquad (2)$$
$g^j(w)=0 \Rightarrow g^{j-1}(g(w))=0$ und $g^{j-1}(w)\neq 0 \Rightarrow g^{j-2}(g(w))\neq 0$

Ist $x\in H_j$, so ist $g(x)\in H_{j-1}$, und ist $x\notin H_{j-1}$, so ist $g(x)\notin H_{j-2}$.
Setzen wir nun $W' := g(W)$, so ist nach (1) W' direkte Summe von Räumen $V(u'_\lambda)$ mit $u'_\lambda := g(u_\lambda)\notin H_{j-2}$. Ferner ist $u' := g(u)\in H_{j-1}\setminus H_{j-2}$.
Schließlich ist $u' = g(u)\notin W' = g(W)$. ⌈Denn wäre $g(u)\in g(W)$, so auch (für $j\geq 2$): $0\neq \underbrace{g^{j-1}(u)}_{\cap} = g^{j-2}(g(u)) \in g^{j-2}g(W) = g^{j-1}(W)$,
d.h. $\{0\}\neq g^{j-1}(V(u))\cap g^{j-1}(W) = g^{j-1}(V(u)\cap W) = g^{j-1}(Y) = \{0\}$ da $Y\subseteq H_{j-1}$, ↯⌋
Damit haben wir aber mit W' statt W, u' statt u und $j-1$ statt j wieder die Voraussetzungen ⊛ nachgewiesen, und erhalten $\boxed{Y' := W'\cap V(u')\subseteq H_{j-2}}$. (s. Beh. ⊕)
Damit ist aber, siehe (2),
$$Y\subseteq g(W)\cap V(g(u)) = W'\cap V(u') = Y' \subseteq H_{j-2},\ \text{also } Y = W\cap V(u)\subseteq H_{j-2}.$$
- Ist $j=2$, so haben wir $Y\subseteq H_0=\{0\}$, was zu zeigen war.
- Ist $j>2$, so wenden wir dies alles auf W', u' an und erhalten ein $Y''\subseteq H_{j-3}$ mit $Y\subseteq Y'\subseteq Y''\subseteq H_{j-3}$ usw., d.h. wir können den Prozess iterieren und erhalten die Kette $Y\subseteq Y'\subseteq\dots\subseteq Y^{(j-1)}\subseteq H_{j-j}=\{0\}$, womit $Y=\{0\}$ gezeigt ist. □