Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

ℓ12: Zusammenfassung zum Allgemeinen Zerlegungssatz

Stichworte: Allgemeiner Zerlegungssatz der Normalformentheorie, Begleitmatrix, Ausgewählte Beispiele zur Konstruktion der Normalform laut allg. Zerlegungssatz

---

Sei $V \neq \{0\}$ endl.dim. K-VR. Aus ℓ10:
Zu gegebenem $f \in \mathrm{End}(V)$ haben wir V zerlegt in Unterräume $U_1, \dots, U_m$, falls $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ gilt, wobei diese Zerlegung des Raumes V aus der Zerlegung $\psi(T) = \prod_{i=1}^m p_i^{\nu_i}$ des Mipos ψ nach Potenzen von irreduziblen Faktoren p_i entstanden ist. Auf jedem einzelnen invarianten Unterraum U_i induziert f den Endomorphismus $f_i := f_{|U_i} \in \mathrm{End}(U_i)$, dessen Minimalpolynom auch Potenz des irreduziblen Polynoms p_i ist. Diese Situation haben wir in ℓ11 genauer untersucht und die U_i jeweils weiter zerlegt in direkte Summen von f-zyklischen Räumen $V(u_{ij})$.

Wir fassen die Ergebnisse, Satz 10.11 und Satz 11.9 nochmals zusammen:

12.1. Satz (Allgemeiner Zerlegungssatz): Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $f \in \mathrm{End}(V)$, $\psi \in K[T]$ sei sein Mipo, d.h. $\psi = \mathrm{Mipo}(f)$. Dieses Mipo besitze die Primfaktorzerlegung $\psi(T) = \prod_{i=1}^m p_i(T)^{\nu_i}$ mit p.w.v. normierten, irreduziblen Polynomen $p_i \in K[T]$, $\deg(p_i) =: k_i \geq 1$ und Exponenten $\nu_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann gelten:

Haupträume→ (i) Die Unterräume $U_i := \mathrm{Ker}(p_i(f)^{\nu_i})$ sind f-invariant und $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$.

(ii) Jeder dieser Unterräume besitzt eine Darstellung $U_i = V(u_{i1}) \oplus \dots \oplus V(u_{in_i})$.
Diese Räume sind unzerlegbare f-invariante Unterräume der Form
$V(u) = L(\{f^j(u);\ j = 0, 1, \dots\})$, jeder hat eine Dimension
$\dim V(u_{ij}) = m_{ij} k_i$ mit $1 \leq m_{ij} \leq \nu_i$, $k_i = \deg(p_i)$,
und zu jedem i gibt es mindestens ein j mit $\dim V(u_{ij}) = \nu_i k_i$,
$i = 1, \dots, m$.

(iii) Wählen wir in jedem dieser Räume eine Basis, so ergeben alle diese Basen zusammengenommen eine Basis B von V. Bezüglich dieser Basis hat f die Matrixdarstellung

$$F=\begin{pmatrix} \boxed{F_{11}} & & & 0 \\ & \boxed{F_{12}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{F_{m m_m}} \end{pmatrix},$$ wobei die F_{ij} quadratische Matrizen sind, nämlich die Matrixdarstellungen von $f_{/V(u_{ij})}$.

(iv) In $V(u_{ij})$ ist

$$(u_{ij}, f(u_{ij}), \dots, f^{k_i-1}(u_{ij}), g(u_{ij}), g f(u_{ij}), \dots, \dots\dots, g^{m_{ij}-1} f^{k_i-1}(u_{ij}))$$

eine Basis,

wobei $k_i := \deg(p_i)$, $1 \le m_{ij} \le v_i$, $g_i = p_i(f)$. Es sei

$p_i(T) = T^{k_i} + \alpha_{i,k_i-1} T^{k_i-1} + \dots + \alpha_{i,0} \in K[T]$.

Bezüglich dieser Basis, von rechts nach links numeriert, hat dann F_{ij} die Gestalt

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} G_i & E_i & & & & 0 \\ & G_i & E_i & & & \\ & & G_i & E_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & G_i & E_i \\ & & & & & G_i \end{pmatrix}$$

bestehend aus $m_{ij} \times m_{ij}$ - Blöcken der Größe $k_i \times k_i$, wobei $E_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & 0 & \\ 0 & & \\ 1 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$ und $G_i = \begin{pmatrix} -\alpha_{i,k_i-1} & 1 & & 0 \\ -\alpha_{i,k_i-2} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\alpha_{i,1} & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{i,0} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

12.2 __Def.:__ G_i heißt Begleitmatrix zu $p_i(T)$, vgl. Ü Anfg. 2 Bl. 12 LA I.

__Bew.__ (von Satz 12.1): Das meiste ist schon mit den Sätzen 10.11 und 11.9 gezeigt, wenn man beachtet, dass für die Räume U_i mit Mipo $p_i^{v_i}$ die Vor. 11.1 (mit p_i als p und v_i als r) erfüllt ist.
Es bleibt nur die in (iv) behauptete Form der Matrixdarstellung zu beweisen. Hierzu unterdrücken wir nicht notwendige Indizes und gehen von einem (Unter-)raum U mit Vor. 11.1 aus.

Sei also $u \in U$, $V(u) = L(\{f^\sigma(u);\ \sigma = 0,1,\ldots\})$ ein (in Lemma 11.5 schon genauer untersuchter) f-zyklischer Unterraum der Dimension $\dim V(u) = mk$ mit $1 \leq m \leq n$, $k = \deg p$, $\mathfrak{q} = p^r$.

Dann ist $\left(f^{k-1}g^{m-1}(u), f^{k-2}g^{m-1}(u), \ldots, fg^{m-1}(u), g^{m-1}(u), f^{k-1}g^{m-2}(u), \ldots\right.$
$\left.\ldots, fg(u), g(u), f^{k-1}(u), \ldots, f(u), u\right)$, (jetzt richtigrum numeriert)

eine Basis von U,

wobei $u \in K_m$, d.h. $g^m(u) = 0$, und $g(f) = f^k + \alpha_{k-1}f^{k-1} + \ldots + \alpha_0 \, id_U$ ist.

Für die Matrixdarstellung von f bezüglich dieser Basis haben wir die Bilder dieser Basis unter f wiederum durch diese Basis darzustellen.

Jedes Basiselement hat die Form $u_{ij} = f^i g^j(u)$,

und somit ist $f(u_{ij}) = f(f^i g^j(u)) = f^{i+1}g^j(u)$.

Folgende Fälle treten auf:

a): $0 \leq i < k-1$: Dann ist $0 \leq i+1 \leq k-1$, d.h. $f(u_{ij}) = 1 \cdot u_{i+1,j}$, und dies ist das in unserer Basis unmittelbar vor u_{ij} auftretende Element.

b): $i = k-1$: Dann ist $f(u_{k-1,j}) = f^k g^j(u) = (g - \alpha_{k-1}f^{k-1} - \ldots - \alpha_0 \, id_U) \cdot g^j(u)$
$= g^{j+1}(u) - \sum_{k=0}^{k-1} a_k f^k g^j(u) = g^{j+1}(u) - \sum_{k=0}^{k-1} \alpha_k u_{kj}$.

In Fall b) gibt es folgende Unterfälle:

- Ist $j+1 \leq m-1$, so ist $g^{j+1}(u) = u_{0,j+1}$, also $f(u_{k-1,j}) = 1 \cdot u_{0,j+1} - \sum_{k=0}^{k-1} \alpha_k u_{kj}$.
- Für $j+1 = m$ ist $g^m(u) = 0$, also $f(u_{k-1,m-1}) = -\sum_{k=0}^{k-1} \alpha_k u_{kj}$.

(Ohne 1, liefert das erste Kästchen G_i in F_{ij})

Wir erhalten also jedesmal

- abgesehen vom ersten Element das vor dem betrachteten Basiselement liegende: dies liefert die oberhalb der Diagonalen auftretenden 1-en und zusätzlich
- alle k Schritte die Linearkombination aus den k folgenden Elementen, wobei die Koeffizienten die negativen Koeffizienten des Mipos sind.

Hieraus lässt sich die behauptete Matrixdarstellung unmittelbar ablesen. $\square$

12.3 <u>Bsp.:</u> Wir zeigen die "Feinzerlegung" gemäß Satz <u>12.1</u> jetzt am Beispiel <u>10.9</u>, wo bereits die "Grobzerlegung" gezeigt wurde. Zur Erinnerung: dort war $V = \mathbb{R}^4$, und es war $f \in \mathrm{End}(V)$ geg. durch die Matrix $F = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Das Minimalpolynom lautet $\mu_f(T) = (T-2)(T+1)^2$;

es sind $p_1(T) = T-2$, $p_2(T) = T+1$ zwei irreduzible Faktoren von μ_f, beide Grad 1:

Wir wählen jetzt die Notation laut Satz <u>12.1</u>.

Die Grobzerlegung war $\mathbb{R}^4 = V = U_1 \oplus U_2$ mit

$$U_1 = \ker p_1(f) = L(e_1) \quad \text{und} \quad U_2 = \ker p_2^2(f) = L(e_1+e_2, e_3, e_4).$$

- Raum U_1 ist 1-dimensional, also sicher nicht weiter zerlegbar.
- Raum U_2 kann nach Algorithmus <u>11.8</u> weiter behandelt werden:

1) Wir haben zu beginnen mit $W = \{0\}$, $j = 2$, $H_2 = \ker(p_2^2(f)) = \ker g^2$ mit $g := p_2(f)$,

2) und suchen ein u_1 mit $u_1 \in \ker(g^2) \setminus \ker(g) = H_2 \setminus (H_1 + W)$.

Ein solcher Vektor ist etwa $u_1 := e_4$. $\ulcorner g(e_4) = e_1+e_2+e_3 \neq 0,\ g^2(e_4) = 0 \lrcorner$

Dann ist der zugehörige f-zyklische Unterraum zu bilden, also

$$W := V(u_1) = L(u_1, g(u_1), g^2(u_1), \dots) \qquad \ulcorner k_2 = \deg p_2 = 1 \lrcorner$$

$$= L(e_4, e_1+e_2+e_3, 0, \dots) = L(e_4, e_1+e_2+e_3).$$

Nun ist $H_1 + W = \ker g + W = L(e_1+e_2, e_3) + L(e_1+e_2+e_3, e_4)$

$$= L(e_1+e_2, e_3, e_4) = H_2.$$

3) Somit gehen wir im Algorithmus <u>11.8</u> auf die Stufe $j = 1$ und suchen ein

$$u_2 \in H_1 \setminus (H_0 + W), \text{ d.h. } u_2 \in L(e_1+e_2, e_3) \setminus L(e_4, e_1+e_2+e_3).$$

Ein solches ist etwa $u_2 := e_3$. $\ulcorner g^0(e_3) = e_3 \neq 0,\ g(e_3) = 0 \lrcorner$

Dann ist der zugehörige f-zyklische Unterraum zu bilden, also

$$V(u_2) = L(u_2, g(u_2), g^2(u_2), \dots) = L(e_3, g(e_3), \dots) = L(e_3).$$

Aus Dimensionsgründen sind wir fertig $\ulcorner U_2 = V(u_1) \oplus V(u_2)$ hat Dim. $2 + 1 = 3 \lrcorner$

und erhalten $\mathbb{R}^4 = \underbrace{L(e_1)}_{U_1} \oplus \underbrace{L(e_1+e_2+e_3, e_4) \oplus L(e_3)}_{U_2 = V(u_1) \oplus V(u_2)}$.

Die notierten Elemente bilden offenbar eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$. Bezüglich dieser hat F die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & -1 & 1 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ in der behaupteten Normalform.

12.4. Beobachtung: Das charakt. Polynom in 12.3 lautet $\chi(T) = (2-T)(-1-T)^3 = (T-2)(T+1)^3$,
und das Mipo μ ist somit ein Teiler des Polynoms χ, und alle irreduziblen Faktoren (das sind hier die Linearfaktoren) von χ tauchen in μ auf.
Dies behandeln wir in ℓ13 als Satz 13.4.

12.5. In ℓ13 behandeln wir noch einen wichtigen Spezialfall explizit, nämlich den, wenn K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K = \mathbb{C}$).
In diesem Fall ist die gewonnene Matrixdarstellung aus Satz 12.1 die Jordansche Normalform, kurz JNF. Es handelt sich dann genau um die in ℓ6 angekündigte Normalform, vgl. Satz 6.9.
Dabei ist lediglich zu beachten, vgl. Kor. 9.16:
über einen algebraisch abgeschlossenen Körper sind alle irreduziblen Polynome linear, also von der Form $p_i(T) = T - \lambda_i$ mit $\deg(p_i) = h_i = 1$.

12.6. Bsp.: Wir behandeln jetzt noch ein Beispiel, wo auch nichtlineare p_i vorkommen.
Satz 12.1 ist ja so allgemein, dass er auch diese Fälle mitbehandelt.
Sei wieder $V = \mathbb{R}^4$, und f geg. durch die Matrix $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & c & -c \\ -1 & 1 & c+1 & -c \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, mit $c \in \mathbb{R}$.

Das charakteristische Polynom lautet $\chi(T) = (T^2+1)^2$.
Über $\mathbb{R}$ ist $p(T) = T^2+1$ irreduzibel, somit kann das Mipo μ nur entweder T^2+1 oder $(T^2+1)^2$ sein [wir verwenden Satz 13.4 aus ℓ13].
Dies prüfen wir durch checken, ob $F^2 + I_4 = 0$ ist oder nicht;
wenn nein, ist notwendig $(F^2+I_4)^2 = 0$ [denn dann muss $\mu = (T^2+1)^2$ sein].
Haben $F^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & c+2 & 0 \\ & -1 & 0 & c+2 \\ & & -1 & 0 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, d.h. $F^2 + I_4 = 0$ genau für $c = -2$.

- Im Falle $c = -2$ ist also $\mu(T) = T^2+1$.
- Im Falle $c \neq -2$ ist also $\mu(T) = (T^2+1)^2$.

Jedenfalls haben wir nur den einen irreduziblen Faktor $p(T) = T^2+1$.
Die Zerlegung nach den Kernen der Primfaktor-Potenzen liefert also nur die triviale Zerlegung, und wir haben gleich den Algorithmus 11.8 anzuwenden.
Diesen führen wir in jedem Fall durch:

- <u>Fall $c=-2$:</u> Es ist $H_1 = \underbrace{\ker(F^2+I_4)}_{} = \mathbb{R}^4$, $H_0=\{0\}$. ($=: G = p(F)$)

 Somit können wir irgendein $u_1 \in \mathbb{R}^4$ wählen, etwa $u_1 := e_1$.

 Dann ist $V(u_1) = V(e_1) = L(e_1, Fe_1) = L(e_1, -e_1-e_2)$.

 Dann wählen wir ein $u_2 \notin V(u_1)$, etwa $u_2 := e_3$,

 erhalten $V(u_2) = V(e_3) = L(e_3, Fe_3) = L(e_3, -2e_1-e_2-e_3-e_4)$

 und haben $\mathbb{R}^4 = V(u_1) \oplus V(u_2)$.

 Bzgl. der Basis $\mathcal{B} = (Fe_1, e_1, Fe_3, e_3)$ hat dann F die Matrixdarstellung

$$_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right),$$

 mit der Begleitmatrix von $p(T) = T^2+1$,

 als zweimal vorkommener Diagonalblock; beachten: $p(T) = T^2 - 0\cdot T - (-1)$.

- <u>Fall $c \neq -2$:</u> Das Mipo ist $\mu(T) = (T^2+1)^2$. Setzen $G := F^2+I_4 = p(F)$.

 Man startet mit einem $u \in H_2 = \mathbb{R}^4$, aber $u \notin H_1 = L(e_1, e_2)$,

 also etwa $u := e_3$. Haben dann $V(u) = L(\underbrace{e_3, Fe_3, Ge_3, FGe_3}_{\rightsquigarrow \mathcal{B}}) = \mathbb{R}^4$.

Mit dieser Basis $\mathcal{B}$, wieder von rechts nach links umnumeriert, erhalten wir die Normalform

$$_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Wieder kommt die Begleitmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ von $p(T) = T^2+1$ zweimal vor, jetzt gibt es aber noch rechts oben die Matrix $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ü Diskutieren Sie Bsp. <u>12.6</u> über $\mathbb{C}$, d.h. in $V = \mathbb{C}^4$.