Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

l12: Zusammenfassung zum Allgemeinen Zerlegungssatz

Stichworte: Allgemeiner Zerlegungssatz der Normalformentheorie, Begleitmatrix, Ausgewählte Beispiele zur Konstruktion der Normalform laut allg. Zerlegungssatz

---

Sei $V \neq \{0\}$ endl.dim. K-VR. Aus l10: zu gegebenem $f \in End(V)$ haben wir V zerlegt in f-invariante Unterräume $U_1, \dots, U_m$, falls $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ gilt, wobei diese Zerlegung des Raumes V aus der Zerlegung $\Psi(T) = \prod_{i=1}^m p_i^{\nu_i}$ des Mipos Ψ nach Potenzen von irreduziblen Faktoren p_i entstanden ist. Auf jedem einzelnen invarianten Unterraum U_i induziert f den Endomorphismus $f_i := f_{|U_i} \in End(U_i)$, dessen Minimalpolynom auch Potenz des irreduziblen Polynoms p_i ist. Diese Situation haben wir in l11 genauer untersucht und die U_i jeweils weiter zerlegt in direkte Summen von f-zyklischen Räumen $V(u_{ij})$.

Wir fassen die Ergebnisse, Satz 10.11 und Satz 11.9 nochmals zusammen:

12.1. Satz (Allgemeiner Zerlegungssatz): Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $f \in End(V)$, $\Psi \in K[T]$ sei sein Mipo, d.h. $\Psi = \text{Mipo}(f)$. Dieses Mipo besitze die Primfaktorzerlegung $\Psi(T) = \prod_{i=1}^m p_i(T)^{\nu_i}$ mit p.w.v. normierten, irreduziblen Polynomen $p_i \in K[T]$, $\deg(p_i) =: k_i \geq 1$ und Exponenten $\nu_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann gelten:

Haupträume → (i) Die Unterräume $U_i := \ker(p_i(f)^{\nu_i})$ sind f-invariant und $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$.

(ii) Jeder dieser Unterräume besitzt eine Darstellung $U_i = V(u_{i1}) \oplus \dots \oplus V(u_{in_i})$. Diese Räume sind unzerlegbare f-invariante Unterräume der Form $V(u) = L(\{f^j(u);\ j = 0, 1, \dots\})$, jeder hat eine Dimension $\dim V(u_{ij}) = m_{ij} k_i$ mit $1 \leq m_{ij} \leq \nu_i$, $k_i = \deg(p_i)$, und zu jedem i gibt es mindestens ein j mit $\dim V(u_{ij}) = \nu_i k_i$, $i = 1, \dots, m$.

$V \neq \{0\}$ endl. dim K-VR, $f \in End(V)$.

$\rightsquigarrow$ Mipo $\mu(T) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{v_i}$

$$\mu = p_1^{v_1} \cdots p_j^{v_j} \cdots p_m^{v_m}$$

Grobzerlegung in §10: $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_j \oplus \dots \oplus U_m$, wobei

$$U_j = \ker \underbrace{p_j(f)}_{=g_j}{}^{v_j} = H_{v_j} \text{ Haupträume}$$

$\rightsquigarrow U = \ker g^{r} = H_r$

Situation = Vor. 11.1: $f \in End(U)$, mipo $\mu = p^{r}$. p irred., $\deg p = k$, $g = p(f)$

Verallg. HR: $H_0 = \ker g^0 \subsetneq H_1 = \ker g^1 \subsetneq \dots \subsetneq H_r = \ker g^r$

Feinzerlegung in §11: Algo 11.8 liefert u_{ij} mit

$$U = \bigoplus_{j=1}^{r} \bigoplus_{i=1}^{m_{ij}} \underbrace{V(u_{ij})}_{\text{unzerlegbar}}$$ [Satz 11.9]

↳ Basis ?

f-zyklischer Raum: $V(u) = L(u, f(u), \dots, f^{k-1}(u),$
$g(u), gf(u), \dots, g f^{k-1}(u),$
$\dots$
$g^{r-1}(u), g^{r-1}f(u), \dots, g^{r-1}f^{k-1}(u))$

$\overset{!}{=} W(u) = L(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{rk-1}(u))$

$rk = \deg \mu$

(Merke: "zyklisch" = "von 1 El. erzeugt")

(iii) Wählen wir in jedem dieser Räume eine Basis, so ergeben alle diese Basen zusammengenommen eine Basis B von V. Bezüglich dieser Basis hat f die Matrixdarstellung

$$F = \begin{pmatrix} \boxed{F_{11}} & & & 0 \\ & \boxed{F_{12}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{F_{m m_m}} \end{pmatrix},$$

wobei die F_{ij} quadratische Matrizen sind, nämlich die Matrixdarstellungen von $f_{/V(u_{ij})}$.

(iv) In $V(u_{ij})$ ist

$$(\underbrace{u_{ij}, f(u_{ij}), \ldots, f^{k_i-1}(u_{ij})}, \underbrace{g(u_{ij}), gf(u_{ij}), \ldots, gf^{k_i-1}(u_{ij})}, \ldots, \underbrace{g^{m_{ij}-1}(u_{ij}), g^{m_{ij}-1}f(u_{ij}), \ldots, g^{m_{ij}-1}f^{k_i-1}(u_{ij})})$$

eine Basis,

wobei $k_i := \deg(p_i)$, ein m_{ij}, $1 \le m_{ij} \le v_i$, $g_i := p_i(f)$. Es sei

$\rightsquigarrow$ $p_i(T) = T^{k_i} + \alpha_{i,k_i-1}T^{k_i-1} + \ldots + \alpha_{i,0} \in K[T]$.

Bezüglich dieser Basis, von rechts nach links numeriert, hat dann F_{ij} die Gestalt

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} G_i & E_i & & & 0 \\ & G_i & E_i & & \\ & & G_i & E_i & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & G_i & E_i \\ & & & & G_i \end{pmatrix}$$

bestehend aus $m_{ij} \times m_{ij}$ - Blöcken der Größe $k_i \times k_i$, wobei $E_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & 0 & \\ 0 & & \\ \boxed{1} & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$ und

$$G_i = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_{i,k_i-1} & 1 & & 0 \\ -\alpha_{i,k_i-2} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\alpha_{i,1} & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_{i,0} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}.$$

12.2. <u>Def.</u>: G_i heißt Begleitmatrix zu $p_i(T)$, vgl. Ü Anfg. 2 Bl. 12 LA I.

<u>Bew.</u> (von Satz 12.1): Das meiste ist schon mit den Sätzen 10.11 und 11.9 gezeigt, wenn man beachtet, dass für die Räume U_i mit Mipo $p_i^{v_i}$ die Vor. 11.1 (mit p_i als p und v_i als r) erfüllt ist.
Es bleibt nur die in (iv) behauptete Form der Matrixdarstellung zu beweisen. Hierzu unterdrücken wir nicht notwendige Indizes und gehen von einem (Unter-)raum U mit Vor. 11.1 aus.

Bsp.: $\chi(T) = (\underbrace{T^3 - 2}_{\text{irred.}})^4$, $\underline{k = \mathbb{Q}}$

$p(T) = T^3 - 2$, $r = 4$, $\underline{h = 3 = \deg p}$

$= T^3 + 0 \cdot T^2 + 0 \cdot T + (-2)$

$\rightsquigarrow$ das G ist $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ +2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, Begleitmatrix zu p

$\rightsquigarrow$ denkbar wäre auf $V(M)$: $\begin{pmatrix} G & E & & \\ & G & E & \\ & & \ddots & E \\ & & & G \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

etwa

$$\begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ +2 & 0 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ +2 & 0 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ +2 & 0 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & \ddots & \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ & & & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ +2 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{bmatrix}$$

l12
-3-

Sei also $u \in U$, $V(u) = L(\{f^\sigma(u);\ \sigma = 0, 1, \ldots\})$ ein (in Lemma 11.5 schon genauer untersuchter) f-zyklischer Unterraum der Dimension $\dim V(u) = mk$ mit $1 \le m \le r$, $k = \deg p$, $q = p^r$.

∇ Dann ist $(\underline{f^{k-1}g^{m-1}(u), f^{k-2}g^{m-1}(u), \ldots, fg^{m-1}(u), g^{m-1}(u)}, \underline{f^{k-1}g^{m-2}(u), \ldots}$

0 $\underline{f^{k-1}g(u), \ldots, fg(u), g(u)}, \underline{f^{k-1}(u), \ldots, f(u), u})$, (jetzt richtigrum numeriert)

eine Basis von U,

wobei $u \in H_m$, d.h. $g^m(u) = 0$, und $g(f) = f^k + \alpha_{k-1}f^{k-1} + \ldots + \alpha_0 \, id_U$ ist.

Für die Matrixdarstellung von f bezüglich dieser Basis haben wir die Bilder dieser Basis unter f wiederum durch diese Basis darzustellen.

Jedes Basiselement hat die Form $u_{ij} = f^i g^j(u)$,

und somit ist $f(u_{ij}) = f(f^i g^j(u)) = f^{i+1}g^j(u)$.

Folgende Fälle treten auf:

a): $0 \le i < k-1$: Dann ist $0 \le i+1 \le k-1$, d.h. $f(u_{ij}) = 1 \cdot u_{i+1,j}$,
und dies ist das in unserer Basis unmittelbar vor u_{ij} auftretende Element.

b): $i = k-1$: Dann ist $f(u_{k-1,j}) = f^k g^j(u) = (g - \alpha_{k-1}f^{k-1} - \ldots - \alpha_0 \, id_U) \cdot g^j(u)$

$$= g^{j+1}(u) - \sum_{k=0}^{k-1} \alpha_k f^k g^j(u) = g^{j+1}(u) - \sum_{k=0}^{k-1} \alpha_k u_{kj}.$$

In Fall b) gibt es folgende Unterfälle:

- Ist $j+1 \le m-1$, so ist $g^{j+1}(u) = u_{0,j+1}$, also $f(u_{k-1,j}) = 1 \cdot u_{0,j+1} - \sum_{k=0}^{k-1} \alpha_k u_{kj}$.
- Für $j+1 = m$ ist $g^m(u) = 0$, also $f(u_{k-1,m-1}) = -\sum_{k=0}^{k-1} \alpha_k u_{kj}$.

(Ohne 1, liefert das erste Kästchen G_i in F_{ij})

Wir erhalten also jedesmal

- abgesehen vom ersten Element das vor dem betrachteten Basiselement liegende: dies liefert die oberhalb der Diagonalen auftretenden 1-en und zusätzlich
- alle k Schritte die Linearkombination aus den k folgenden Elementen, wobei die Koeffizienten die negativen Koeffizienten des Mipos sind.

Hieraus lässt sich die behauptete Matrixdarstellung unmittelbar ablesen. $\square$

ℓ 12

-4-

12.3 **Bsp.:** Wir zeigen die "Feinzerlegung" gemäß Satz 12.1 jetzt am Beispiel 10.9, wo bereits die "Grobzerlegung" gezeigt wurde. Zur Erinnerung: dort war $V = \mathbb{R}^4$, und es war $f \in \mathrm{End}(V)$ geg. durch die Matrix $F = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Das Minimalpolynom lautet $\mu_f(T) = (T-2)(T+1)^2$,

es sind $p_1(T) = T-2$, $p_2(T) = T+1$ zwei irreduzible Faktoren von μ_f, beide Grad 1:

Wir wählen jetzt die Notation laut Satz 12.1.

Die Grobzerlegung war $\mathbb{R}^4 = V = U_1 \oplus U_2$ mit

$$U_1 = \ker p_1(f) = L(e_1) \quad \text{und} \quad U_2 = \ker p_2^2(f) = L(e_1+e_2, e_3, e_4).$$

- Raum U_1 ist 1-dimensional, also sicher nicht weiter zerlegbar.
- Raum U_2 kann nach Algorithmus 11.8 weiter behandelt werden:

1.) Wir haben zu beginnen mit $W = \{0\}$, $j = 2$, $H_2 = \ker(p_2^2(f)) = \ker g^2$ mit $g := p_2(f)$,

m_1 ist HV 2-te St. $g = f-(-1)id$ $g = p_2(f)$

2.) und suchen ein m_1 mit $m_1 \in \ker(g^2) \setminus \ker(g) = H_2 \setminus (H_1 + W)$.

Ein solcher Vektor ist etwa $m_1 := e_4$. ⌜$g(e_4) = e_1+e_2+e_3 \neq 0$, $g^2(e_4) = 0$⌟

Dann ist der zugehörige f-zyklische Unterraum zu bilden, also

$$W := V(m_1) = L(m_1, g(m_1), g^2(m_1), \ldots)$$ ⌜$k_2 = \deg p_2 = 1$⌟

$$= L(e_4, e_1+e_2+e_3, 0, \ldots) = L(e_4, e_1+e_2+e_3).$$

Nun ist $H_1 + W = \ker g + W = L(e_1+e_2, e_3) + L(e_1+e_2+e_3, e_4)$

$$= L(e_1+e_2, e_3, e_4) = H_2.$$

m_2 ist HV 1-Stufe = EV

3.) Somit gehen wir im Algorithmus 11.8 auf die Stufe $j=1$ und suchen ein $m_2 \in H_1 \setminus (H_0 + W)$, d.h. $m_2 \in L(e_1+e_2, e_3) \setminus L(e_4, e_1+e_2+e_3)$.

Ein solches ist etwa $m_2 := e_3$. ⌜$g^0(e_3) = e_3 \neq 0$, $g(e_3) = 0$⌟

Dann ist der zugehörige f-zyklische Unterraum zu bilden, also

$$V(m_2) = L(m_2, g(m_2), g^2(m_2), \ldots) = L(e_3, g(e_3), \ldots) = L(e_3).$$

Aus Dimensionsgründen sind wir fertig ⌜$U_2 = V(m_1) \oplus V(m_2)$ hat Dim. $2+1=3$⌟

und erhalten $\mathbb{R}^4 = \underbrace{L(e_1)}_{U_1} \oplus \underbrace{L(e_1+e_2+e_3, e_4) \oplus L(e_3)}_{U_2 = V(m_1) \oplus V(m_2)}$.

Die notierten Elemente bilden offenbar eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$. Bezüglich dieser hat f die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & -1 & 1 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ in der behaupteten Normalform.

[$T+1$ hat Begl.m. (-1)]

12.4. <u>Beobachtung</u>: Das charakt. Polynom in <u>12.3</u> lautet $\chi(T)=(2-T)(-1-T)^3=(T-2)(T+1)^3$, und das Mipo μ ist somit ein Teiler des Polynoms χ, und alle irreduziblen Faktoren (das sind hier die Linearfaktoren) von χ tauchen in μ auf.
Dies behandeln wir in <u>ℓ13</u> als Satz <u>13.4</u>.

12.5. In <u>ℓ13</u> behandeln wir noch einen wichtigen Spezialfall explizit, nämlich den, wenn K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K=\mathbb{C}$).
In diesem Fall ist die gewonnene Matrixdarstellung aus Satz <u>12.1</u> die <u>Jordansche Normalform</u>, kurz <u>JNF</u>. Es handelt sich dann genau um die in <u>ℓ6</u> angekündigte Normalform, vgl. Satz <u>6.9</u>.
Dabei ist lediglich zu beachten, vgl. Kor. <u>9.16</u>:
über einen algebraisch abgeschlossenen Körper sind alle irreduziblen Polynome linear, also von der Form $p_i(T)=T-\lambda_i$ mit $\deg(p_i)=h_i=1$.

12.6. <u>Bsp.</u>: Wir behandeln jetzt noch ein Beispiel, wo auch nichtlineare p_i vorkommen.
Satz <u>12.1</u> ist ja so allgemein, dass er auch diese Fälle mitbehandelt.
Sei wieder $V=\mathbb{R}^4$, und f geg. durch die Matrix $F=\begin{pmatrix}-1&2&c&-c\\-1&1&c+1&-c\\0&0&-1&2\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$, mit $c\in\mathbb{R}$.

Das charakteristische Polynom lautet $\chi(T)=(T^2+1)^2$.
Über $\mathbb{R}$ ist $p(T)=T^2+1$ irreduzibel, somit kann das Mipo μ nur entweder T^2+1 oder $(T^2+1)^2$ sein [wir verwenden Satz <u>13.4</u> aus <u>ℓ13</u>].
Dies prüfen wir durch checken, ob $F^2+I_4=0$ ist oder nicht;
wenn nein, ist notwendig $(F^2+I_4)^2=0$ [denn dann muss $\mu=(T^2+1)^2$ sein].
Haben $F^2=\begin{pmatrix}-1&0&c+2&0\\&-1&0&c+2\\&&-1&0\\&&&-1\end{pmatrix}$, d.h. $F^2+I_4=0$ genau für $c=-2$.

- Im Falle $c=-2$ ist also $\mu(T)=T^2+1$.
- Im Falle $c\neq-2$ ist also $\mu(T)=(T^2+1)^2$.

Jedenfalls haben wir nur den einen irreduziblen Faktor $p(T)=T^2+1$.
Die Zerlegung nach den Kernen der Primfaktor-Potenzen liefert also nur die triviale Zerlegung, und wir haben gleich den Algorithmus <u>11.8</u> anzuwenden.
Diesen führen wir in jedem Fall durch:

• <u>Fall $c=-2$:</u> Es ist $H_1 = \ker(\overbrace{F^2+I_4}^{=:G=p(F)}) = \mathbb{R}^4$, $H_0 = \{0\}$.

Somit können wir irgendein $u_1 \in \mathbb{R}^4$ wählen, etwa $u_1 := e_1$.

Dann ist $V(u_1) = V(e_1) = L(e_1, Fe_1) = L(e_1, -e_1 - e_2)$.

Dann wählen wir ein $u_2 \notin V(u_1)$, etwa $u_2 := e_3$,

erhalten $V(u_2) = V(e_3) = L(e_3, Fe_3) = L(e_3, -2e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$

und haben $\mathbb{R}^4 = V(u_1) \oplus V(u_2)$.

Bzgl. der Basis $\mathcal{B} = (Fe_1, e_1, Fe_3, e_3)$ hat dann F die Matrixdarstellung

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right),$$

mit der Begleitmatrix von $p(T) = T^2 + 1$,

als zweimal vorkommender Diagonalblock; beachten: $p(T) = T^2 - 0 \cdot T - (-1)$.

• <u>Fall $c \neq -2$:</u> Das Mipo ist $\mu(T) = (T^2+1)^2$. Setzen $G := F^2 + I_4 = p(F)$.

Man startet mit einem $u \in H_2 = \mathbb{R}^4$, aber $u \notin H_1 = L(e_1, e_2)$,

also etwa $u := e_3$. Haben dann $V(u) = L(\underbrace{e_3, Fe_3, Ge_3, FGe_3}_{\rightsquigarrow \mathcal{B}}) = \mathbb{R}^4$.

Mit dieser Basis $\mathcal{B}$, wieder von rechts nach links umnumeriert, erhalten wir die Normalform

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Wieder kommt die Begleitmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ von $p(T) = T^2 + 1$ zweimal vor,

jetzt gibt es aber noch rechts oben die Matrix $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ü Diskutieren Sie Bsp. 12.6 über $\mathbb{C}$, d.h. in $V = \mathbb{C}^4$.