Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

ℓ13: Jordansche Normalform (JNF)

Stichworte: Jordansche Normalform, Ψ teilt χ, Satz von Cayley-Hamilton, Anzahl von Begleitmatrizen, Zusammenhang: geometrische und algebraische Vielfachheit

---

Sei $V \neq \{0\}$ endl. dim. K-VR.
Jetzt behandeln wir noch einen wichtigen Spezialfall explizit, nämlich den, wenn K algebraisch abgeschlossen ist (z.B. $K = \mathbb{C}$).
(In diesem Fall heißt die gewonnene Matrixdarstellung aus Satz 12.1 die Jordansche Normalform, kurz JNF.)
Über einen algebraisch abgeschlossenen Körper sind alle irreduziblen Polynome linear, also von der Form $p_i(T) = T - \lambda_i$ mit $\deg(p_i) = k_i = 1$.
Die in Satz 12.1 benutzten Matrizen E_i und G_i erhalten die spezielle Form $E_i = (1)$, $G_i = (\lambda_i)$ als 1×1-Matrizen, und F_{ij} wird zu

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in K^{m_{ij} \times m_{ij}},$$

d.h. mit λ_i in der Diagonalen und 1-en darüber.

13.1. Def.: Solche Matrizen heißen Jordan-Matrix oder Jordanblock der Dimension m_{ij}.

Erhalten so den folgenden wichtigen

13.2. Satz (Jordansche Normalform): Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K (etwa $K = \mathbb{C}$!). Dann hat sein Minimalpolynom $\Psi = \mathrm{Mipo}(f)$ die Gestalt $\Psi(T) = \prod_{i=1}^{m} (T - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_i \in K$, die $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, $r_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, und f besitzt eine Matrixdarstellung

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & F_{m,n_m} \end{pmatrix},$$

wobei die F_{ij} Jordanblöcke zu λ_i sind.

(Fortsetzung Satz 13.2:)

Die λ_i sind genau die EWe von f bzw. F, und zu jedem EW λ_i gehört mindestens ein Jordanblock der Dimension r_i, wobei r_i den Grad angibt, mit dem $T-\lambda_i$ in $\Psi(T)$ vorkommt.

Diese Darstellung heißt Jordansche Normalform.

Dabei ist f genau dann diagonalisierbar, wenn alle $r_i = 1$ sind.

Bew.: z.z. sind nur noch die Aussagen über EWe und Diag'barkeit.

Dass jedes λ_i EW ist, liest man unmittelbar an der 1. Spalte eines zugehörigen Jordanblocks ab.

• Sind alle $r_i = 1$, so sind alle Jordanblöcke 1×1-Matrizen, d.h. $F_{ij} = (\lambda_i)$, womit eine Diagonaldarstellung gegeben ist. Ist andererseits (und dies gilt für jeden Körper K) f diag'bar, so gibt es eine Basis $(u_\kappa\,;\ \kappa = 1,\dots,\dim V)$, so dass mit gewissen $\lambda_\kappa \in K$ für alle κ dann $f(u_\kappa) = \lambda_\kappa u_\kappa$ gilt. Seien nun OE $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ genau die verschiedenen EWe. Wir bilden $p(T) = (T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_m)$.

Dann ist $p(f) = (f-\lambda_1 id_V)\cdots(f-\lambda_m id_V)$, wobei die Faktoren beliebig vertauscht werden können. Wegen $(f-\lambda_\kappa id_V)(u_\kappa) = f(u_\kappa) - \lambda u_\kappa = 0$ ist somit $p(f)(u_\kappa) = 0$ für alle κ, also $p(f) = 0$. Somit teilt das Mipo Ψ von f unser Polynom p und kann demnach nur aus lauter verschiedenen Linearfaktoren bestehen, d.h. alle $r_i = 1$. □

13.3 **Bem.:** (i) Der Vergleich mit Satz 6.9 zeigt, dass in 6.9 Jordanblöcke zu gleichem EW nicht zusammengefasst wurden. In Satz 13.2 sind $F_{i1}, F_{i2}, \dots$ die Blöcke zu λ_i.
Satz 13.2 besagt die Existenz einer Basis, bzgl. der man die JNF hat. In 6.9 war diese vorausgesetzt worden (und nicht bekannt, ob so eine Basis existiert).

(ii) Fundamental für alle Überlegungen zur Normalform war das Mipo Ψ.
Wir hatten zunächst (Lemma 10.4) geschlossen, dass mit $n := \dim V$ ein solches Polynom vom Grad $\leq n^2$ existieren müsse und später (11.6(i)) auf $\deg(\Psi) \leq n$ geschlossen, ohne jedoch genaueres über das Mipo zu erfahren. Nachträglich können wir jedoch einen wichtigen allgemeinen Zusammenhang zwischen Mipo und charakteristischem Polynom feststellen:

13.4. <u>Satz</u> (<u>Zusammenhang Mipo und char. Pol.</u>):
Sei V ein n-dim. K-VR, wo K ein beliebiger Körper ist, $f \in \mathrm{End}(V)$.
Sei $\chi(T)$ das charakteristische Polynom von f und $\Psi = \mathrm{Mipo}(f)$ das Mipo.
Dann gelten:
(i) Ψ ist Teiler von χ, genauer: ist $\chi(T) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} p_i(T)^{s_i}$ die Primfaktorzerlegung von χ mit p.w.v. normierten irreduziblen Polynomen $p_i \in K[T]$, mit $\deg(p_i) \geq 1$, $s_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so hat das Mipo Ψ die Form $\Psi(T) = \prod_{i=1}^{m} p_i(T)^{r_i}$, wobei für alle i gilt, dass $1 \leq r_i \leq s_i$. ($\rightsquigarrow$ Jeder irred. Faktor p_i kommt in Ψ vor!)
(ii) In der Darstellung gemäß Satz <u>12.1</u> durch Matrizen der Form

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} G_i & E_i & & 0 \\ & G_i & E_i & \\ & & \ddots & E_i \\ 0 & & & G_i \end{pmatrix}$$

geben an:

- die Exponenten s_i des charakteristischen Polynoms χ, <u>wie oft</u> die Matrix G_i zum Faktor $p_i(T)$ <u>insgesamt</u> in der Diagonalen der Matrixdarstellung von F erscheint,
- die Exponenten r_i des Minimalpolynoms, wieviele G_i die <u>größte</u> auftretende Teilmatrix F_{ij} enthält.

(iii) Auch für das charakteristische Polynom χ gilt $\boxed{\chi(f) = 0.}$
(Diese Aussage heißt <u>Satz von Cayley-Hamilton</u>.)

13.5. <u>Bem.</u>: Für Linearfaktoren $p_i(T) = T - \lambda_i$ bedeutet s_i also die Ordnung von λ_i als Nullstelle von χ, und dies ist gleich der Anzahl der in der Diagonalen der Matrixdarstellung von f auftretenden Exemplare von λ_i.
Dagegen bedeutet r_i die Größe eines maximalen Jordanblocks zu λ_i.
Zu jedem Jordanblock gehört ein Eigenvektor zu λ_i, und die Anzahl der Jordanblöcke zu λ_i ist somit die Dimension des Eigenraums von f zu λ_i, genannt die <u>geometrische Ordnung/Vielfachheit von λ_i</u>.
Man nennt s_i die <u>algebraische Vielfachheit</u> von λ_i, vgl. <u>L21.6 in LA I</u>.
Laut Satz <u>13.4</u> ist also die geometrische Vielfachheit eines EWs λ_i <u>stets höchstens so groß</u> wie die algebraische Vielfachheit von λ_i.

13.6. <u>Bew. von Satz 13.4:</u> Wir berechnen das charakteristische Polynom χ von f aus der in Satz <u>12.1</u> abgeleiteten Matrixdarstellung.
Laut Satz <u>L19.15 aus LA I</u> wissen wir, dass die Determinante einer Block-Diagonalmatrix gleich dem Produkt der Determinanten der Blöcke ist.
Somit ist das charakteristische Polynom χ von f gleich dem Produkt aller charakteristischen Polynome χ_{ij} von F_{ij},
d.h. $\chi_{ij}(T) = \det(F_{ij} - T \cdot I_{\mu_{ij}})$, wobei das Produkt über alle in <u>(ii)</u> vorkommenen Blöcke zu nehmen ist.
Betrachten wir also zu einem Block $F = \begin{pmatrix} G & E & & 0 \\ & G & E & \\ & & \ddots & E \\ 0 & & & G \end{pmatrix}$ mit $G = \begin{pmatrix} -\alpha_{h-1} & 1 & & 0 \\ -\alpha_{h-2} & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -\alpha_1 & 0 & & \\ -\alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
und $E = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & 0 & \\ 1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$ gehörige
charakteristische Polynom $\det(F - TI) = \det \begin{pmatrix} G-TI & E & & \\ & G-TI & E & \\ & & \ddots & E \\ & & & G-TI \end{pmatrix}$.

Kommen hier genau r viele G-Blöcke vor,
so zeigt Entwickeln nach den Spalten von links, dass $\det(F-TI) = \det(G-TI)^r$.
Entwickeln nach der letzten Zeile liefert

$$\det(G-TI) = \det \begin{pmatrix} -\alpha_{h-1}-T & 1 & & 0 \\ -\alpha_{h-2} & -T & 1 & \\ \vdots & 0 & -T & \ddots \\ -\alpha_1 & & & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & & -T \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^h \cdot (T^h + \alpha_{h-1} T^{h-1} + \ldots + \alpha_0).$$

Dies bedeutet: Das charakteristische Polynom eines Blocks G_i ist genau das irreduzible Polynom $p_i(T)$, aus dem G_i entstanden ist.
Damit folgen <u>(i)</u> und <u>(ii)</u> aus Satz <u>12.1</u>.
<u>Zu (iii):</u> Nach <u>(i)</u> gilt für ein geeignetes Polynom $q \in K[T]$: $\chi = q \cdot \Psi$
und somit $\chi(f) = q(f) \cdot \underbrace{\Psi(f)}_{=0} = 0$.

□

13.7. <u>Bem.:</u> Die Matrix G_i ist die Begleitmatrix zum Polynom p_i.
In Ü <u>Aufgabe 2 (a) Blatt 12 in LA I</u> wurde der im Beweis verwendete Schritt gezeigt, dass Laplace-Entwicklung $\chi_{G_i}(T) = (-1)^{\alpha_i} p_i(T)$ liefert. Dass dort die Transponierte der hier notierten Matrix steht, sollte Sie dabei nicht stören.

Der letzte Satz gibt noch Hinweise, wie man die Zerlegung in f-invariante Räume bzw. die obige Normalform einer Matrixdarstellung für f erhalten kann:

13.8. **Rezept**: 1) Berechne aus irgendeiner Matrixdarstellung $\hat{F}$ von f das charakteristische Polynom $\chi(T) = \det(\hat{F} - T I)$.

2) Zerlege χ in irreduzible Faktoren $\chi(T) = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{m} p_i(T)^{s_i}$.
(Für diesen Schritt gibt es keinen allgemein verwendbaren Algorithmus!)
Genau die hier auftretenden p_i treten auch im Mipo auf, und zwar mit Exponenten $r_i \leq s_i$, alle $r_i \geq 1$.

3) Bilde $g_i := p_i(f)$ und dazu die Haupträume $H_{im} := \ker(g_i^m)$, $m = 0, 1, \ldots$
Dann ist für ein $m \leq s_i$ (nämlich für $m = r_i$) der Raum H_{ir_i} genau der zu dem Faktor $p_i^{r_i}$ gehörige invariante Unterraum, dessen Zerlegung wir dann nach dem Algorithmus 11.8 vornehmen können.

Ü Warum ist r_i das kleinste m mit $\ker(g_i^m) = \ker(g_i^{m+1})$?