Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

ℓ14: Anwendung der JNF bei Differentialgleichungen

Stichworte: lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Anfangswertproblem, Lösung (Existenz- und Eindeutigkeit) davon mit JNF-Theorie

---

Wir behandeln in diesem letzten Kapitel zu §2 noch eine Anwendung der JNF, nämlich die Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Solchen begegnen wir im "echten" Leben in den Naturwissenschaften, vor allem der Physik, aber auch Biologie, Chemie, ...

Wir bezeichnen hierfür mit $y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $y(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{pmatrix}$ eine Funktion auf $\mathbb{R}$ (der "Zeit" t) nach $\mathbb{C}^n$ (irgendwelche n vielen "Größen", etwa physikalische), deren Komponentenfunktionen $\eta_1, \dots, \eta_n$ allesamt stetig diff'bar sein sollen.

Dazu sei $y': \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto y'(t) := \begin{pmatrix} \eta_1'(t) \\ \vdots \\ \eta_n'(t) \end{pmatrix}$ die Ableitung. Sie ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Weiter sei $A := (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine fest gewählte Matrix (mit komplexen Zahlen als Einträgen).

14.1. Bezeichnung: (i) Wir nennen eine Abb. $D: y \mapsto D(y) := y' - Ay$, d.h. $(D(y))(t) := y'(t) - A \cdot y(t)$, einen linearen Differential-Operator erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(ii) Für eine stetige Funktion $b: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto b(t) := \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_n(t) \end{pmatrix}$

heißt $D(y) = b$, d.h. $\boxed{y' = Ay + b}$ ein lineares Differentialgleichungssystem $\underbrace{\text{erster Ordnung}}_{\to \text{ d.h. maximal erste Ableitungen kommen vor}}$ $\underbrace{\text{(mit konstanten Koeffizienten)}}_{\text{die Einträge von } A \text{ sind konstant, d.h. keine veränderlichen Funktionen in } t}$.

Ist $b(t) \equiv 0$ (konstant-0-Fkt.), so reden wir von einem homogenen System, sonst von einem inhomogenen System. (→ vgl. LGS...)

14.2. **Bem.:** Mit den Funktionen-Vektorräumen $U := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m;\ u \text{ stetig diff'bar}\}$ und $V := \{v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m;\ v \text{ stetig}\}$ (sind ja $\mathbb{R}$-VRe) ist $D \in \mathrm{Hom}(U, V)$, was die Benennung "linearer Differentialoperator" rechtfertigt.
(Auch Diff'gleichungsprobleme mit höheren Ableitungen lassen sich über solche Diff'operatoren 1. Ordnung darstellen, s. hier lediglich Bsp. 14.1.1.)

Zur Struktur der Lösungsmenge können wir Mittel der LA I heranziehen:

14.3. **Lemma:** Ist y_* (irgend) eine (spezielle) Lösung des inhomogenen Systems $Dy = b$, d.h. von $y' - Ay = b$, so ist $\mathbb{L}(D; b) := \{y_* + y;\ y \in \ker D\}$ die Gesamtheit aller Lösungen. Dabei besteht $\ker D$ aus allen Lösungen der homogenen Gleichung $Dy = 0$, d.h. von $y' - Ay = 0$.

Bew.: Laut Satz L16.15 in LA I. □

Die homogene Gleichung hat folgende Eigenschaft.

14.4. **Lemma:** Ist y Lösung von $Dy = 0$, d.h. ist $y' = Ay$, und hat für eine Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion y eine Nullstelle, d.h. $y(t_0) = 0$, so ist $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bew.: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $y'(t) = Ay(t)$, so dass $\eta_i'(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \eta_j(t)$ für $i = 1, \dots, n$ ist.
Durch Integration folgt

$$\eta_i(t) = \eta_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \eta_i'(\tau)\,d\tau = 0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \eta_j(\tau)\,d\tau .$$

Mit $\eta(t) := \max\{\max\{|\eta_i(\tau)|;\ \text{für } \tau \text{ mit } |\tau - t_0| \le |t - t_0|\};\ i = 1, \dots, m\}$
und $a := \max\{|\alpha_{ij}|;\ \text{alle } i, j\}$ ist damit

$$0 \le \eta(t) \le \int_{t_0}^{t} m \cdot a \cdot \eta(\tau)\,d\tau = \eta(t) \cdot m \cdot a \cdot |t - t_0| .$$

Ist t so nahe bei t_0, dass $ma|t - t_0| < 1$, folgt daraus notwendig $\eta(t) = 0$, also auch $\eta(\tau) = 0$ für $|\tau - t_0| < |t - t_0|$.
Dieser Schluss ist $\underbrace{\text{iterierbar}}_{\text{erst: } y(t)=0 \text{ für alle } t \text{ nahe } t_0, \text{ dann alle } t \text{ (induktiv) erreichbar...}}$ und zeigt, dass notwendig $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. □

14.5. <u>Folgerung:</u> (i) Für jedes $y_0 \in \mathbb{C}^n$ hat das Anfangswertproblem $Dy = b$, $y(0) \overset{!}{=} y_0$, höchstens eine Lösung.

(ii) Die Abbildung $\varphi: \ker D \to \mathbb{C}^n$, $y \mapsto y(0)$, ist injektiv, und damit ist $\dim \ker D \leq n$.

14.6. <u>Bem.:</u> Tatsächlich gibt es bei (i) <u>stets</u> eine Lösung, dann also eindeutig. Denn: Mit <u>14.7</u> sehen wir, dass φ bijektiv ist und dann $\dim \ker D = n$ ist.

<u>Bew.:</u> <u>(i)</u>: Sind y_1, y_2 Lösungen von $Dy = b$, jeweils mit $y_1(0) = b = y_2(0)$, so gilt für $y := y_1 - y_2$:

$$Dy = D(y_1 - y_2) = Dy_1 - Dy_2 = b - b = 0,$$
$$y(0) = y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0,$$

so dass $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt nach Lemma <u>14.4</u>.

<u>(ii)</u>: Stimmen zwei Lösungen von $Dy = 0$ an der Stelle $t_0 = 0$ überein, so sind sie nach (i) identisch. Dies sagt gerade, dass φ injektiv ist. □

Nun zeigen wir folgenden zentralen Satz mit unserer EW theorie/JNF-Theorie:

14.7. <u>Satz:</u> Die Abbildung $\varphi: \ker D \to \mathbb{C}^n$, $y \mapsto y(0)$, ist auch surjektiv und damit bijektiv, d.h. zu jedem $y_0 \in \mathbb{C}^n$ <u>gibt es genau eine</u> Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe $Dy = y' - Ay = 0$, $y(0) = y_0$.

Mit Folgerung <u>14.5</u> ist dies äquivalent dazu, dass $Dy = 0$ genau n linear unabhängige Lösungen besitzt. Wir führen den Beweis schrittweise.

14.8. <u>Reduktion:</u> Es genügt, die Aussage im Fall zu beweisen, wenn A in <u>JNF</u> vorliegt!

<u>Bew.:</u> Ist $y' = Ay$ und G eine (konstante) invertierbare Matrix ($\in \mathbb{C}^{n \times n}$), so ist für die Funktion $z := G^{-1}y$, also $z(t) = G^{-1} \cdot y(t)$, die Ableitung dann $z' = G^{-1}y'$, und damit $z' = G^{-1}y' = G^{-1}AGG^{-1}y = G^{-1}AGz$, folglich z Lösung von $z' = (G^{-1}AG)z$, wobei man den AW $z(0) = G^{-1}y(0)$ hat. Es genügt also, die Beh. für das transformierte System zu beweisen, und dabei kann man durch Wahl von G die Matrix $G^{-1}AG$ in <u>JNF</u> erreichen laut Satz <u>13.2</u>. □

14.9. Spezialfall: Die Matrix A habe JNF mit genau einem Jordan-Kasten

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_m + E_m, \text{ wo } I_m = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$$

$$\text{und } E_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Spalten der Matrix

$$C(t) := e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & t^3/3! & \cdots \\ 0 & 1 & t & t^2/2! & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}_{m,m}$$

eine Basis von Ker D, d.h. der Lösungen von $z' = Az$.

Bew.: Zu betrachten ist $z'(t) = Az(t) = (\lambda I_m + E_m)z(t)$.
Mit einem noch zu bestimmenden Vektor $c(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$ setzen wir an: $z(t) := e^{\lambda t} \cdot c(t)$.
Dies ergibt für alle t die zu erfüllende
Gleichung $z'(t) = \underbrace{e^{\lambda t}(\lambda c(t) + c'(t))}_{\text{laut Produktregel}} \overset{!}{=} (\lambda I_m + E_m)e^{\lambda t}c(t) = e^{\lambda t}(\lambda c(t) + E_m c(t))$
$\Leftrightarrow c'(t) = E_m c(t)$.
In Komponenten aufgeschrieben lautet die letzte Gleichung $\gamma_i'(t) = \begin{cases} \gamma_{i+1}(t), & i<m, \\ 0, & i=m, \end{cases}$
und die Spalten der oben notierten Matrix C sind offenbar Lösungen dieser Gleichung. Da C invertierbar ist, sind sie linear unabhängig und mit Folgerung 14.5 also eine Basis.

14.10. Allgemeiner Fall: Sei A in (beliebiger) JNF gegeben, also als $A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$ mit Jordan-Kästen $J_1, \dots, J_k$. Zu jedem Jordan-Kasten J_i bilde man entsprechend dem Spezialfall 14.9 die zugehörige Matrix $C_i(t)$ und ordne alle diese Matrizen an zur neuen Matrix

$$C(t) = \begin{pmatrix} \boxed{C_1(t)} & & & \\ & \boxed{C_2(t)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_k(t)} \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Spalten von C linear unabhängig und Lösungen von $z' = Az$, womit auch Satz 14.7 gezeigt ist.

$\square$

14.11. **Beispiel:** Wir möchten die folgende "gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung" lösen: $u''(t) = (\delta - q^2)u(t) + 2q\,u'(t)$ mit festen $\delta, q \in \mathbb{R}$.

Wir setzen $y_1 := u$, $y_2 := u'$, so dass also $y_1' = u' = y_2$, $y_2' = u''$.

Wir haben dann die Gleichungen
$$\left\| \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = (\delta - q^2)y_1 + 2q\,y_2 \end{array} \right\|$$
(simultan) zu lösen, also ein DGL-System von Diff'glen. 1. Ordnung wie in 14.1, denn mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta - q^2 & 2q \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ können wir es als $y' = Ay$ schreiben.

Zur Lösung ist nun die JNF der Matrix A zu bestimmen!

Das charakteristische Polynom lautet
$$\chi_A(T) = \det\begin{pmatrix} -T & 1 \\ \delta - q^2 & 2q - T \end{pmatrix} = T^2 - 2qT + (q^2 - \delta) = (T - q)^2 - \delta.$$

Jetzt Fallunterscheidung, ob es einen einzigen oder zwei EWe gibt:

__1. Fall: $\delta \neq 0$:__ Hier gibt es zwei verschiedene (unter Umständen nicht reelle) EWe λ_1, λ_2, nämlich $\lambda_{1/2} = q \pm \sqrt{\delta}$. Dazu gibt es zwei linear unabhängige EVen c_1, c_2, und die Funktionen
$$y_1(t) := e^{\lambda_1 t} \cdot c_1(t)$$
$$y_2(t) := e^{\lambda_2 t} \cdot c_2(t)$$
bilden eine Basis des Lösungsraums von $y' = Ay$. (Ü Nachrechnen!)

__2. Fall: $\delta = 0$:__ Haben $\chi_A(T) = (T - q)^2$, also nur den einen EW $\lambda = q$.

Es ist $A - qI_2 = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & 2q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix}$ eine Matrix vom Rang 1.
Damit ist hier auch ihr Kern 1-dimensional.

Es gibt also genau einen 1-dim. Eigenraum, so dass notwendig ein (weiterer echter) __Hauptvektor__ existiert!

Einen EV g_1 erhalten wir mit $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$ als Lösung von $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix} x = 0$,
und einen HV g_2 erhalten wir mit $g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Lösung
von $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix} x = g_1$,
und mit $G := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$, $G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$, ist
$$J := G^{-1}AG = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix} \text{ die } \underline{\text{JNF}}.$$

Zum transformierten Diff'gleichungssystem $z' = Jz$ haben wir dann als Lösungen die Spalten von $C(t) := e^{qt}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Für unser ursprüngliches System $y' = Ay$ erhalten wir daraus wegen $y = Gz$ als Lösungen die Spalten von

$$Y(t) := e^{qt}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{qt}\begin{pmatrix} 1 & t \\ q & qt+1 \end{pmatrix},$$

d.h. $y_1(t) = e^{qt}\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$, $y_2(t) = e^{qt}\begin{pmatrix} t \\ qt+1 \end{pmatrix}$.

Ü Rechnen Sie nach, dass dies Lösungen sind und übersetzen Sie sie in Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung 2. Ordnung.