

Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu

K. Halupczok

§2: Normalformentheorie

L14: Anwendung der JNF bei Differentialgleichungen

Stichworte: lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Anfangswertproblem, Lösung (Existenz und Eindeutigkeit) davon mit JNF-Theorie

Wir behandeln in diesem letzten Kapitel zu §2 noch eine Anwendung der JNF, nämlich die Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Solchen begegnen wir im "echten" Leben in den Naturwissenschaften, vor allem der Physik, aber auch Biologie, Chemie, ...

Wir bezeichnen hierfür mit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}$ eine Funktion auf \mathbb{R} (der "Zeit" t)

nach \mathbb{C}^m (irgendwelche in vielen "Größen", etwa physikalische), deren Komponentenfunktionen y_1, \dots, y_m allesamt stetig diff'bar sein sollen. Dazu sei $y': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$, $t \mapsto y'(t) := \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ \vdots \\ y'_m(t) \end{pmatrix}$ die Ableitung. Sie ist stetig auf \mathbb{R} .

Weiter sei $A := (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine fest gewählte Matrix (mit komplexen Zahlen als Einträgen).

14.1. Bezeichnung: (i) Wir nennen die Abb. $\mathcal{D}: y \mapsto \mathcal{D}(y) := y' - Ay$, d.h. $(\mathcal{D}(y))(t) := y'(t) - A \cdot y(t)$, einen linearen Differential-Operator erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(ii) Für eine stetige Funktion $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m$, $t \mapsto b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix}$

heißt $\mathcal{D}(y) = b$, d.h. $y' = Ay + b$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten).

homogen:
 $\mathcal{D}(y) = 0$

inhomogen:
 $\mathcal{D}(y) = b$

→ d.h. maximal erste Ableitungen kommen vor

die Einträge von A sind konstant, d.h. keine veränderlichen Funktionen in t

Ist $b(t) \equiv 0$ (konstant-0-Fkt.), so reden wir von

einem homogenen System, sonst von einem inhomogenen System. (→ vgl. LGS...)

14.2. Bem.: Mit den Funktionen-Vektorräumen $U := \{u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m; u \text{ stetig diff'bar}\}$ und $V := \{v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^m; v \text{ stetig}\}$

(Sind ja \mathbb{R} -VRe) ist $D \in \text{Hom}(U, V)$, was die Benennung "linearer Differentialoperator" rechtfertigt.

(Auch Diff'gleichungsprobleme mit höheren Ableitungen lassen sich über solche Diff'operatoren 1. Ordnung darstellen, s. hier lediglich Bsp. 14.11.)

$$Dy = b$$

Zur Struktur der Lösungsmenge können wir Mittel der LA I heranziehen:

14.3. Lemma: Ist y_* (irgend) eine (spezielle) Lösung des

inhomogenen Systems $Dy = b$, d.h. von $y' - Ay = b$,

so ist $\mathcal{L}(D; b) := \{y_* + y; y \in \ker D\}$ die Gesamtheit aller Lösungen.

Dabei besteht $\ker D$ aus allen Lösungen der homogenen Gleichung $Dy = 0$, d.h. von $y' - Ay = 0$.

Bew.: Laut Satz L16.15 in LA I. \square

Die homogene Gleichung hat folgende Eigenschaft.

14.4. Lemma: Ist y Lösung von $Dy = 0$, d.h. ist $y' = Ay$, und hat für eine Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion y eine Nullstelle, d.h. $y(t_0) = 0$, so ist $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bew.: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $y'(t) = Ay(t)$, so dass $y'_i(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j(t)$ für $i = 1, \dots, n$ ist.

Durch Integration folgt

$$y_i(t) = y_i(t_0) + \int_{t_0}^t y'_i(\tau) d\tau = 0 + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j(\tau) d\tau.$$

Mit $y(t) := \max \{ \max \{ |y_i(\tau)|; \text{für } \tau \text{ mit } |\tau - t_0| \leq |t - t_0| \}; i = 1, \dots, n \}$

und $a := \max \{ |\alpha_{ij}|; \text{alle } i, j \}$ ist damit

$$0 \leq y(t) \leq \int_{t_0}^t m \cdot a \cdot y(\tau) d\tau = y(t) \cdot m \cdot a \cdot |t - t_0|.$$

Ist t so nahe bei t_0 , dass $m \cdot a \cdot |t - t_0| < 1$, folgt daraus notwendig $y(t) = 0$, also auch $y(\tau) = 0$ für $|\tau - t_0| < |t - t_0|$.

Dieser Schluss ist iterierbar und zeigt, dass notwendig $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.
erst: $y(t) = 0$ für alle t nahe t_0 , dann alle t (induktiv) erreichbar... \square

14.5. Folgerung: (i) Für jedes $y_0 \in \mathbb{C}^n$ hat das Anfangswertproblem $Dy = b$, $y(0) = \underline{y_0}$, höchstens eine Lösung.

(ii) Die Abbildung $\varphi: \ker D \rightarrow \mathbb{C}^n$, $y \mapsto y(0)$, ist injektiv, und damit ist $\dim \ker D \leq n$.

14.6. Bem.: Tatsächlich gibt es bei (i) stets eine Lösung, dann also eindeutig. Denn:
Mit 14.7 sehen wir, dass φ bijektiv ist und dann $\dim \ker D = n$ ist.

Bew.: (i): Sind y_1, y_2 Lösungen von $Dy = b$, jeweils mit $y_1(0) = y_0 = y_2(0)$, so gilt für $y := y_1 - y_2$: $Dy = D(y_1 - y_2) = Dy_1 - Dy_2 = b - b = 0$,

$$y(0) = y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0,$$

so dass $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt nach Lemma 14.4.

(ii): Stimmen zwei Lösungen von $Dy = 0$ an der Stelle $t_0 = 0$ überein, so sind sie nach (i) identisch. Dies sagt gerade, dass φ injektiv ist. \square

Nun zeigen wir folgenden zentralen Satz mit unserer EL-theorie/JNF-theorie:

14.7. Satz: Die Abbildung $\varphi: \ker D \rightarrow \mathbb{C}^n$, $y \mapsto y(0)$, ist auch surjektiv und damit bijektiv, d.h. zu jedem $y_0 \in \mathbb{C}^n$ gibt es genau eine Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe $Dy = y' - Ay = 0$, $y(0) = y_0$.

Mit Folgerung 14.5 ist dies äquivalent dazu, dass $Dy = 0$ genau n linear unabhängige Lösungen besitzt. Wir führen den Beweis schrittweise.

14.8. Reduktion: Es genügt, die Aussage im Fall zu beweisen, wenn A in JNF vorliegt!

Bew.: Ist $y' = Ay$ und G eine (konstante) invertierbare Matrix ($\in \mathbb{C}^{n \times n}$), so ist für die Funktion $z := G^{-1}y$, also $z(t) = G^{-1} \cdot y(t)$, die Ableitung dann $z' = G^{-1}y'$, und damit $z' = G^{-1}y' = G^{-1}AGG^{-1}y = G^{-1}AGz$, folglich z Lösung von $z' = (G^{-1}AG)z$, wobei man den AW $z(0) = G^{-1}y(0)$ hat. Es genügt also, die Beh. für das transformierte System zu beweisen, und dabei kann man durch Wahl von G die Matrix $G^{-1}AG$ in JNF erreichen laut Satz 13.2. \square

14.9. Spezialfall: Die Matrix A habe JNF mit genau einem Jordan-Block

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_{\text{und } \bar{E}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \lambda I_m + E_m, \text{ wo } I_m = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

Dann sind die Spalten der Matrix

$$C(t) := e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & t^3/3! & \cdots \\ 0 & 1 & t & t^2/2! & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix}_{m, n}$$

eine Basis von $\ker D$, d.h. der Lösungen

$$\text{vom } z' = Az.$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad \quad \quad}_{=: \tilde{C}(t)}$$

Bew.: Zu betrachten ist $z'(t) = Az(t) = (\lambda I_m + E_m) z(t)$.

Ansatz:

Mit einem noch zu bestimmenden Vektor $c(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix}$ setzen wir an: $z(t) := e^{\lambda t} \cdot c(t)$.

Dies ergibt für alle t die zu erfüllende

$$\text{Gleichung } z'(t) = e^{\lambda t} (\lambda c(t) + c'(t)) \stackrel{!}{=} (\lambda I_m + E_m) e^{\lambda t} c(t) = e^{\lambda t} (\lambda c(t) + E_m c(t))$$

mit Produktregel

$$\Leftrightarrow c'(t) = E_m c(t).$$

In Komponenten ausgeschrieben lautet die letzte Gleichung

$$z_i'(t) = \begin{cases} \delta_{i+1}(t), & i < m, \\ 0, & i = m, \end{cases}$$

und die Spalten der oben notierten Matrix $\tilde{C}(t)$ sind offenbar Lösungen dieser Gleichung. Da $\tilde{C}(t)$ invertierbar ist, sind sie linear unabhängig und mit Folgerung 14.5 also eine Basis.

14.10. Allgemeiner Fall: Sei A in (beliebiger) JNF gegeben, also als $A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$ mit Jordan-Kästen J_1, \dots, J_k . Zu jedem Jordan-Kasten J_i bilde man entsprechend dem Spezialfall 14.9 die zugehörige Matrix $C_i(t)$ (und ordne alle diese Matrizen an zur neuen Matrix

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_k(t) \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Spalten von C linear unabhängig und Lösungen von $z' = Az$, womit auch Satz 14.7 gezeigt ist.

□

14.11. Beispiel: Wir möchten die folgende "gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung" lösen: $y''(t) = (\delta - q^2)y(t) + 2qy'(t)$ mit festen $\delta, q \in \mathbb{R}$.

Wir setzen $y_1 := y, y_2 := y'$, so dass also $y_1' = y' = y_2, y_2' = y''$.

Wir haben dann die Gleichungen $y_1' = y_2$

$$y_2' = (\delta - q^2)y_1 + 2qy_2$$

(simultan) zu lösen, also ein DGL-System von Diff'gl. 1. Ordnung wie in 14.1, denn mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta - q^2 & 2q \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ können wir es als $y' = Ay$ schreiben.

Zur Lösung ist nun die JNF der Matrix A zu bestimmen!

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} -T & 1 \\ \delta - q^2 & 2q - T \end{pmatrix} = T^2 - 2qT + (q^2 - \delta) = (T - q)^2 - \delta.$$

Jetzt Fallunterscheidung, ob es einen einzigen oder zwei EW gibt:

1. Fall: $\delta \neq 0$: Hier gibt es zwei verschiedene (unter Umständen nicht reelle) EWs λ_1, λ_2 , nämlich $\lambda_{1,2} = q \pm \sqrt{\delta}$. Dazu gibt es zwei linear unabhängige EVs c_1, c_2 , und die Funktionen $y_1(t) := e^{\lambda_1 t} \cdot c_1 \quad | \rightarrow y_1' = e^{\lambda_1 t} \cdot \lambda_1 \cdot c_1 = A y_1$
 $y_2(t) := e^{\lambda_2 t} \cdot c_2 \quad | \rightarrow A c_2$

bilden eine Basis des Lösungsraums von $y' = Ay$. (U Nachrechnen!)

2. Fall: $\delta = 0$: Haben $\chi_A(T) = (T - q)^2$, also nur den einen EW $\lambda = q$.

Es ist $A - qI_2 = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & 2q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix}$ eine Matrix vom Rang 1.

Damit ist hier auch ihr Kern 1-dimensional.

Es gibt also genau einen 1-dim. Eigenraum, so dass notwendig ein (weiterer sicher) Hauptvektor existiert!

Einen EV g_1 erhalten wir mit $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$ als Lösung von $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix}x = 0$,

und einen HV g_2 erhalten wir mit $g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Lösung

$$\text{von } \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix}x = g_1,$$

und mit $G := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$, ist

$$J := G^{-1}AG = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix} \text{ die JNF.}$$

zum transformierten Diff'gleichungssystem $\dot{z}' = Jz$ haben wir dann als Lösungen die Spalten von $C(t) := e^{qt} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Für unser ursprüngliches System $y' = Ay$ erhalten wir daraus wegen $y = Gz$ als Lösungen die Spalten von

$$Y(t) := e^{qt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{qt} \begin{pmatrix} 1 & t \\ q & qt+1 \end{pmatrix},$$

d.h. $y_1(t) = \underbrace{e^{qt} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}}_{\text{Lösung}}, \quad y_2(t) = \underbrace{e^{qt} \begin{pmatrix} t \\ qt+1 \end{pmatrix}}_{\text{Lösung}}$.

Ü Rechnen Sie nach, dass dies Lösungen sind
 und übersetzen Sie sie in Lösungen der ursprünglichen } Differentialgleichung 2. Ordnung. } 7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2 & 2q \end{pmatrix} \rightarrow y' = Ay$$

$$y'_1(t) = \begin{pmatrix} (e^{qt})' \\ (e^{qt}q)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qe^{qt} \\ q^2e^{qt} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} Ay_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2 & 2q \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{qt} \\ e^{qt}q \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} qe^{qt} \\ -q^2e^{qt} + 2qe^{qt} \end{pmatrix}}$$

$$y'_2(t) = \begin{pmatrix} (e^{qt} \cdot t)' \\ (e^{qt}(qt+1))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qe^{qt}t + e^{qt} \\ qe^{qt}(qt+1) + e^{qt} \cdot q \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2 & 2q \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{qt}t \\ e^{qt}(qt+1) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} e^{qt}qt + e^{qt} \\ -q^2e^{qt}t + 2qe^{qt}(qt+1) \end{pmatrix}} \checkmark$$

$$\text{2. Komp.} = \underline{qe^{qt}(tq+1)} + \underline{qe^{qt}(qt+1)} - \underline{q^2e^{qt}t} \\ = \underline{q^2t} e^{qt} + \underline{qe^{qt}}$$