Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

ℓ15: Quotienten und direkte Summen von Vektorräumen

Stichworte: Strukturtransfer, Quotientenraum, universelle Eigenschaft, direkte Summe einer Familie von Vektorräumen als Verallgemeinerung des Basisbegriffs, freier Vektorraum $V(B)$

Radikal neuer Ansatz !

Im folgenden soll die Struktur mathematischer Objekte im Vordergrund stehen. Wir schaffen uns Objekte, die diese Struktur tragen. Bisher hatten wir eher umgekehrt mathematische Objekte angesehen und ihre Struktur beschrieben. Als erstes zeigen wir, dass sich (fast) jede Menge zu einem Vektorraum machen lässt:

15.1. Satz (Strukturtransfer): Es sei V ein K-VR, W eine Menge und $\varphi: V \to W$ eine bijektive Funktion. Wir definieren in W Operationen $+: W \times W \to W$ und $\cdot: K \times W \to W$, sowie ein Element $0 = 0_W$ durch

$$w + w' := \varphi(\varphi^{-1}(w) + \varphi^{-1}(w')),$$
$$\alpha \cdot w := \varphi(\alpha \varphi^{-1}(w)),$$
$$0 := \varphi(0), \text{ d.h. } 0_W := \varphi(0_V), \quad \text{für alle } w, w' \in W, \alpha \in K.$$

Dann ist W mit diesen Daten ein K-VR und φ ein VR-Isomorphismus.

Bew.: Von den VR-Axiomen zeigen wir exemplarisch die Assoziativität:
Für $x, y, z \in W$ ist $(x+y)+z = \varphi(\varphi^{-1}(x+y) + \varphi^{-1}(z)) = \varphi\big(\varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y))) + \varphi^{-1}(z)\big)$
$= \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z))$, und dasselbe erhält man für $x + (y+z)$.
Wendet man auf die definierenden Gleichungen φ^{-1} an, so erhält man
$\varphi^{-1}(w+w') = \varphi^{-1}(w) + \varphi^{-1}(w')$ und $\varphi^{-1}(\alpha w) = \alpha \varphi^{-1}(w)$, $\varphi^{-1}(0) = 0$.
Somit ist $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$, und weil φ bijektiv ist, sind φ und φ^{-1} also Isomorphismen. $\square$

Diese Methode nutzen wir nun, um uns neue VRe mit bestimmten Eigenschaften zu schaffen, zunächst den Quotientenraum bzw. Quotientenvektorraum.

Bsp. für Strukturtransfer:

$\mathbb{F}_2$-VR, $V = \mathbb{F}_2$

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

$+$: $0+0=0=1+1$, $0+1=1+0=1$

$\cdot$: $0 \cdot x = 0$, $1 \cdot x = x$

$W = \{ \heartsuit, * \}$ $\longleftarrow$

$\varphi : \mathbb{F}_2 \to W$

$0 \mapsto \heartsuit$

$1 \mapsto *$, bij.

$$w + w' := \varphi(\varphi^{-1}(w) + \varphi^{-1}(w'))$$

z.B. $\underline{\underline{\heartsuit + *}} = \varphi(\varphi^{-1}(\heartsuit) + \varphi^{-1}(*)) = \varphi(0+1)$

$= \varphi(1) = *$

l 15

– 2 –

Einen solchen Quotientenraum V/U hatten wir bereits in LA I, L12.13 konstruiert als $V/U = \{v+U;\ v \in V\}$ mit $v+U := \{v+u;\ u \in U\}$.

Laut LA I, L5.15 sind die $v+U$ entweder (paarweise) identisch oder disjunkt.

$\hookrightarrow v \sim v'$ Ä-Rel.
$\Leftrightarrow v - v' \in U$
$\Leftrightarrow v+U = v'+U$

Wir betrachten die Abb. $\pi : V \to V/U,\ v \mapsto v+U$, diese ist nach Konstruktion surjektiv.

Es gilt: $\pi(v_1) = \pi(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$. $\circledast$

Die Motivation ist nun, $W = V/U$ mit Strukturtransfer wie oben zu einem K-VR zu machen; aber: π ist surjektiv, nicht bijektiv!

Dennoch reicht Eigenschaft $\circledast$ aus, um dies trotzdem zu tun, so dass V/U ein K-VR und π ein Homomorphismus wird:

Für Letzteres müssen die Operationen $\boxplus$ und $\boxdot$ so auf V/U erklärt sein, dass $\pi(v_1+v_2) = \pi(v_1) \boxplus \pi(v_2)$, $\pi(\alpha v) = \alpha \boxdot \pi(v)$, $\pi(0) = 0+U = U$ sein muss. Wegen $\circledast$ ist aber gesichert, dass durch diese Setzung wohldefinierte, d.h. repräsentantenunabhängige Operationen in V/U definiert sind. Dass diese dann V/U zu einem K-VR machen, ist dann langweilige Rechnerei.

Statt $\boxplus$ und $\boxdot$ benutzen wir in V/U auch die üblichen Symbole $+, \cdot$.

Wir fassen zusammen:

15.2 Def. und Satz (Quotientenraum): Sei V ein K-VR, U ein Unterraum. Der Vektorraum V/U heißt Quotientenraum (gelesen "V nach U", "V mod U"), der surjektive Homomorphismus $\pi : V \to V/U$ heißt kanonischer Epimorphismus.

Es gelten: (i) $\ker(\pi) = U$,

(ii) ist W irgendein K-VR, $\varphi : V \to W$ ein Homom. mit $U \subseteq \ker(\varphi)$, so gibt es genau einen Homom. $\Psi : V/U \to W$ mit $\varphi = \Psi \circ \pi$.

"kommutatives" Diagramm:

$$\begin{tikzcd} U \subseteq \ker\varphi \subseteq V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & W \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

(iii) Dieser Homom. Ψ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi) = \ker(\pi) \overset{(i)}{=} U$.

(iv) Der Quotientenraum V/U ist durch die universelle Eigenschaft (ii) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. ist Q ein K-VR, $\pi' : V \to Q$ ein Hom. mit $U = \ker(\pi')$ und mit $(\forall$ K-VR W $\forall$ Hom. $\varphi : V \to W,\ U \subseteq \ker\varphi,\ \exists!\, \Psi \in \mathrm{Hom}(Q,W)$: $\varphi = \Psi \circ \pi')$, so sind Q und V/U isomorph.

Bew.: (i) Beh.: $\ker \pi = U$

Bew.: Sei $v \in V$.

$\underline{v \in \ker \pi} \iff \pi(v) = 0 + U$

$\iff v + U = 0 + U \iff \underline{v \in U}$. $\square$

(ii): $\Psi : V/U \to W$

$v + U \mapsto \varphi(v) \quad \leftarrow \quad \Psi \circ \pi = \varphi$ ✓

$\hookrightarrow$ notwendige Def. für Ψ

$\rightsquigarrow \Psi$ eind. bestimmt!

• Ψ ist wohldef.:

$v + U = v' + U \Rightarrow v - v' \in U$, etwa $v - v' = u \in U$.

Dann: $\varphi(v) = \varphi(v' + u) = \varphi(v') + \underbrace{\varphi(u)}_{=0 \text{ (} U \leq \ker\varphi)} = \varphi(v')$ ✓

• Ψ ist linear: ... ✓

U UVR von $V \rightsquigarrow V/U = \{ v + U ;\ v \in V \}$

$$\left.\begin{tikzcd} U \subseteq \ker\varphi \subseteq V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\Psi"'] & \end{tikzcd}\right\} \begin{array}{l} \text{univ. Eig. von } V/U \\ = \text{Homomorphiesatz} \end{array}$$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $\underline{U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\rightsquigarrow V/U$?

$V = U \oplus W$

Betr. $\underline{W := \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, $\varphi : V \to W$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dann $U = \ker \varphi$ ✓

Dann $\exists!\, \Psi : V/U \to \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + U \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wohldef.,

• ist injektiv, da $U = \ker\varphi$, • ist surj. ✓ Also: Ψ Isom.: $V/U \cong \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bew.: (i), (ii) sind bereits bekannt aus LA I, 13.16. ("Homomorphiesatz").
(iii): „⇒": Aus $\psi\circ\pi=\varphi$ folgt $x\in\ker(\varphi)\Leftrightarrow x\in\ker(\psi\circ\pi)\Leftrightarrow\psi(\pi(x))=0$.
Ist ψ injektiv, so ist $\psi(\pi(x))=0\Leftrightarrow\pi(x)=0\Leftrightarrow x\in\ker(\pi)$, d.h. $\ker(\varphi)=\ker(\pi)$. „⇐": Ist $\ker(\varphi)=\ker(\pi)$, so ist $\psi(\pi(x))=0\Leftrightarrow\pi(x)=0$, und da π surjektiv ist, folgt also $\psi(v+U)=0\Leftrightarrow v+U=0+U$, d.h. ψ injektiv.
(iv): Wir haben folgende Situation:

$$\boxed{\begin{tikzcd} & U \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\ & V \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ V/U \arrow[rr, dashed, bend right, "\psi"'] & & Q \arrow[ll, dashed, bend right, "\psi'"'] \end{tikzcd}}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

a) Benutze ii) mit $W:=Q$, $\varphi:=\pi'$, dies liefert
$\psi: V/U\to Q$ mit $\pi'=\psi\circ\pi$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] & V/U \\ Q \arrow[ur, dashed, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

b) Benutze ii) mit $W:=V/U$, $\varphi:=\pi$, dies liefert
$\psi': Q\to V/U$ mit $\pi=\psi'\circ\pi'$.

Dann haben wir $\psi'\circ\psi: V/U\to V/U$ mit $\psi'\circ\psi\circ\pi=\psi'\circ\pi'=\pi=\mathrm{id}_{V/U}\circ\pi$
und analog: $\psi\circ\psi': Q\to Q$ mit $\psi\circ\psi'\circ\pi'=\psi\circ\pi=\pi'=\mathrm{id}_Q\circ\pi'$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & V/U \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\chi=\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

c) Benutze ii) mit $W:=V/U$, $\varphi:=\pi$, dies liefert eindeutig
$\chi: V/U\to V/U$ mit $\pi=\chi\circ\pi$. Dies tut auch $\psi'\circ\psi$ und $\mathrm{id}_{V/U}$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{also ist } \psi'\circ\psi=\mathrm{id}_{V/U}.\\ \text{d) Analog: } \psi\circ\psi'=\mathrm{id}_Q.\end{array}\right\}\longrightarrow \psi,\psi' \text{ inverse} \to \text{Isom.}$$

Also sind $\psi\in\mathrm{Hom}(V/U,Q)$ und $\psi'\in\mathrm{Hom}(Q,V/U)$ zueinander inverse Isomorphismen $\rightsquigarrow$ ✓ (vgl. LA I, 6.18) □

15.3 **Bem.:** • Wesentlich an diesem Quotientenraum ist nicht die Art, wie wir ihn konstruiert haben, d.h. wie seine Elemente aussehen, sondern allein die Charakterisierung durch die universelle Eigenschaft (ii). Sie legt den Raum nur bis auf Isomorphie fest, d.h. je zwei Räume mit dieser Eigenschaft sind isomorph.

Ü Zeigen Sie, dass jeder zu V/U isomorphe Raum diese Eigenschaft (ii) hat.

• Das Charakterisieren bis auf Isomorphie bedeutet gerade, dass wir von allen speziellen Eigenschaften der Elemente absehen können; aber auch umgekehrt, wenn es gerade passt, uns für bestimmte Zwecke einen besonders geeigneten Raum aus dieser Isomorphieklasse auswählen können.

(ü) Zeigen Sie, dass jeder zu V/U isomorphe Raum diese Eigenschaft (ii) hat.

Sei $\chi : V/U \longrightarrow Q$ Isom.

Dann hat Q die Eig. (ii):

Sei $\varphi : V \to W$ mit $U \subseteq \ker \varphi$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dd, bend right=60, "\pi'"'] & W \\
V/U \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\psi"'] \arrow[d, "\chi"'] & \\
Q \arrow[uur, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

$\longrightarrow \quad \psi \circ \pi = \varphi$

$\exists!\, \omega = \psi \circ \chi^{-1} : \quad \omega \circ \pi' = \varphi$ ✓

$$
\begin{aligned}
\hookrightarrow \quad \omega \circ (\underbrace{\chi \circ \pi}_{\pi'}) &= (\psi \circ \chi^{-1}) \circ (\chi \circ \pi) \\
&= \psi \circ id_{V/U} \circ \pi \\
&= \psi \circ \pi = \varphi
\end{aligned}
$$

der zu V komplementäre UR

$V = U \oplus W$

Beobachtung:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W' \\ W \arrow[ur, dashed, "\exists!\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Ist $(b_1,\dots,b_m)$ eine Basis von V und $U := L(b_1,\dots,b_n)$, $W := L(b_{n+1},\dots,b_m)$, so hat W die universelle Eigenschaft des Quotienten: Wählen wir dazu $\pi: V \to W$ durch $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i \mapsto \pi(v) := \sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i b_i$ und definieren zu gegebenem $\varphi: V \to W'$ mit $U \subseteq \ker(\varphi)$ das $\Psi: W \to W'$ über $\Psi(b_i) := \varphi(b_i)$, $i = n+1,\dots,m$. Also ist W isomorph zu V/U.
Andererseits sind U und W komplementäre Unterräume in V, d.h. $V = U \oplus W$ als direkte Summe. Diesen Begriff der direkten Summe wollen wir nun so erweitern, dass die beteiligten Räume <u>nicht</u> a priori Unterräume desselben Raums V sein müssen, wir also insbesondere bei den Summanden zu isomorphen übergehen können. Ein solcher erweiterter Begriff der direkten Summe liefert uns dann die Möglichkeit, mit einer kurzen Formel wie $V = U \oplus \underbrace{V/U}_{\text{(..zunächst kein UR von } V\text{...)}}$ alles auszudrücken.

Dabei wollen wir <u>nicht</u> von den Elementen der beteiligten Räume ausgehen, sondern mitten wieder nur eine universelle Eigenschaft, mit der der gewünschte mathematische Sachverhalt auf das Wesentliche reduziert wird.
Um sie herzuleiten, greifen wir kurz auf den alten Begriff der direkten Summe "$\oplus$" zurück: <u>Vor.</u>: Sei $(b_1,\dots,b_m)$ eine Basis von V, $L(b_1,\dots,b_n) =: U$, $L(b_{n+1},\dots,b_m) =: W$.
Dann ist $V = U \oplus W$ und $U \subseteq V$, $W \subseteq V$, wodurch (recht triviale) Homom. $\eta: U \to V$, $u \mapsto u \in V$, und $\eta': W \to V$, $w \mapsto w \in V$, gegeben sind.

15.4. <u>Beh.</u>: Ist nun X irgendein K-VR und $\varphi: U \to X$, $\varphi': W \to X$ irgendwelche Homom., so gibt es immer genau einen Homom. $\Psi: V \to X$ mit $\Psi \circ \eta = \varphi$ und $\Psi \circ \eta' = \varphi'$.

<u>komm. Diagramm:</u>

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V \arrow[d, dashed, "\exists!\Psi"] & W \arrow[l, "\eta'"'] \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

<u>Bew.</u>: Damit $\Psi \circ \eta = \varphi$ auf U ist muss $\Psi(u) = \varphi(u)$ sein und dito $\Psi(w) = \varphi'(w)$. Damit Ψ Homom. ist, muss gelten: $\Psi(u+w) = \Psi(u) + \Psi(w) = \varphi(u) + \varphi'(w)$. Nach Konstruktion hat jedes $v \in V$ eine eind. Darst. als $v = u + w$, $u \in U$, $w \in W$, somit ist Ψ auf ganz V eindeutig festgelegt und ein Homom., was trivial nachrechenbar ist. $\square$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & V \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] & V_2 \arrow[l, "\eta_2"'] \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Dies nutzen wir zu folgender

15.5. **Def. (direkte Summe)**: Es seien V ein K-VR, $(V_i\,;\, i \in I)$ eine Familie von K-VRen und $(\eta_i\,;\, i\in I)$ eine Familie von Homom. $\eta_i : V_i \to V$, $i \in I$. Dann heißt V direkte Summe der V_i, in Zeichen $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$, wenn gilt: Für jeden K-VR W und jede Familie $(\varphi_i\,;\, i\in I)$ von Homom. mit $\varphi_i : V_i \to W$ gibt es genau einen Hom. $\varphi : V \to W$, so dass für alle $i \in I$ gilt: $\varphi \circ \eta_i = \varphi_i$ (*).

Komm. Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\eta_i"'] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi \text{ für alle } i"'] & \end{tikzcd}$$

Im Spezialfall haben wir gesehen, dass so etwas existieren kann. Wir zeigen die Eindeutigkeit und Existenz (der in 15.5 def. direkten Summe "$\oplus$") wie folgt.

15.6. **Satz (Eindeutigkeit von "$\oplus$")**: Die direkte Summe in 15.5 ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bew.: Sei V direkte Summe der $(V_i\,;\, i\in I)$ mit den Homom. $\eta_i : V_i \to V$,
und V' direkte Summe der $(V_i\,;\, i\in I)$ mit den Homom. $\eta_i' : V_i \to V'$.

Z.z.: V und V' sind isomorph. Dieser Beweis verläuft genauso wie der für den Quotientenraum:

a) Benutze (*) für V und die η_i, mit $W := V'$, $\varphi_i := \eta_i'$, dies liefert einen Hom. $\varphi : V \to V'$ mit $\varphi\circ\eta_i = \eta_i'$ für alle i.

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\eta_i'"] \arrow[d, "\eta_i"'] & V' \\ V \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

b) Benutze (*) für V' und die η_i', mit $W := V$, $\varphi_i := \eta_i$, dies liefert einen Hom. $\varphi' : V' \to V$ mit $\varphi'\circ\eta_i' = \eta_i$ für alle i.

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "\eta_i'"'] & V \\ V' \arrow[ur, dashed, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Dann haben wir $\varphi'\circ\varphi : V \to V$ mit $\varphi'\circ\varphi\circ\eta_i = \varphi'\circ\eta_i' = \eta_i$ (alle $i\in I$),
analog $\varphi\circ\varphi' : V' \to V'$ mit $\varphi\circ\varphi'\circ\eta_i' = \varphi\circ\eta_i = \eta_i'$ (alle $i \in I$),

c) Benutze (*) für V und die η_i, mit $W := V$, $\varphi_i := \eta_i$, dies liefert genau ein $\chi : V \to V$ mit $\chi\circ\eta_i = \eta_i$ für alle i.
Nun sind $\varphi'\circ\varphi$ und id_V solche Homom., also ist $\varphi'\circ\varphi = id_V$.
Analog folgt $\varphi\circ\varphi' = id_{V'}$, damit sind φ und φ' Isomorphismen. □

Nun zur Konstruktion, d.h. der Existenz der direkten Summe "$\oplus$":

Zur Eindeutigkeit von $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ mit "abstract nonsense":

Sei V, V' beides direkte Summen der $(V_i)_{i\in I}$,

haben $\eta_i : V_i \to V$, $\eta_i' : V_i \to V'$, alle $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & V & \\
V_i \arrow[ur, "\eta_i"] \arrow[rr, "\eta_i'"] \arrow[d, "\eta_i"'] & & V' \arrow[ul, dashed] \\
V \arrow[urr, dashed] \arrow[uur, bend right=60, "\mathrm{id}_V"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\exists! \varphi' : \underline{\varphi' \circ \eta_i' = \eta_i}$

$\exists! \varphi : \underline{\varphi \circ \eta_i = \eta_i'}$

$\exists! \chi : \chi \circ \eta_i = \eta_i$

aber id_V tut's auch

$\rightsquigarrow \chi = \underline{\mathrm{id}_V}$

- $\underline{\mathrm{id}_V = \varphi' \circ \varphi}$, denn $\varphi' \circ \underbrace{\varphi \circ \eta_i}_{\eta_i'} = \eta_i$ ✓

- analog durch Rollentausch (V mit V'): $\underline{\mathrm{id}_{V'} = \varphi \circ \varphi'}$

Also: φ, φ' sind Isom., d.h. $V \cong V'$

(Konstruktion "⊕")

15.7. Def.: Es sei eine Familie $(V_i;\ i\in I)$ von K-VRen gegeben. Wir bilden
$\underline{V} := \{(v_i;\ i\in I);$ wobei $v_i \in V_i$, aber $v_i \neq 0$ nur für endlich viele $i\in I\}$.

"Coprodukt" $V = \coprod_{i\in I} V_i \subseteq \prod_{i\in I} V_i$ "direktes Produkt" ↑

In V erklären wir Operationen und ein Nullel. 0 durch

$+: V\times V\to V$, $\quad (v_i;\ i\in I) \underline{+} (v_i';\ i\in I) := (v_i + v_i';\ i\in I)$.

$\cdot: K\times V \to V$, $\quad \alpha \underline{\cdot} (v_i;\ i\in I) := (\alpha v_i;\ i\in I)$

$0\in V$ sei $\quad \underline{0} := (0_i;\ i\in I)$,

wobei rechts an der i-ten Stelle die entsprechende Operation bzw. das Nullelement von V_i zu nehmen ist.

Def. die Abbildungen $\underline{\eta_i}: V_i \to V$, $\eta_i(x) := (\delta_{ij}(x);\ j\in I)$ für $x\in V_i$,
wobei $\delta_{ij}(x) := \begin{cases} 0\in V_j, & j\neq i,\\ x\in V_j, & j=i.\end{cases}$ ("Einbettungen" der V_i in V)

15.8. Satz: a) In Def. 15.7. ist V ein K-VR, die η_i sind Homom.
b) Jedes $v = (v_i;\ i\in I) \in V$ hat damit eine eindeutige Darstellung als

$$v = \sum_{i\in I} \eta_i(v_i), \qquad \boxtimes$$

wobei, falls I keine endliche Menge sein sollte, dies als Abkürzung für die Summation über die endlich vielen $i\in I$ mit $v_i\neq 0$ zu lesen ist.
c) V aus 15.7 erfüllt mit den η_i die universelle Eigenschaft (*) in Def. 15.5.

Bew.: a), b): Klar laut Konstruktion bzw. Nachrechnen... als (Ü)
c): Sei W ein K-VR, $(\varphi_i;\ i\in I)$ eine Familie von Homom. $\varphi_i: V_i\to W$.

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\varphi_i} & W \\ {\scriptstyle \eta_i}\downarrow & \nearrow {\scriptstyle \exists!\varphi} & \\ V & & \end{array}$$

- Ist $\varphi: V\to W$ ein Hom. mit $\varphi\circ\eta_i = \varphi_i$ (alle $i\in I$), so ist wegen $\boxtimes$ notwendig für jedes $v = (v_i;\ i\in I)\in V$:

$$\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{i\in I} \eta_i(v_i)\Big) = \sum_{i\in I} (\varphi\circ\eta_i)(v_i) = \sum_{i\in I} \varphi_i(v_i),$$

wobei es sich immer um endliche Summen handelt; also ist φ eindeutig festgelegt.
- Die Festlegung $\varphi\big(\sum_{i\in I}\eta_i(v_i)\big) := \sum_{i\in I} \varphi(v_i)$ liefert andererseits auch einen Homom. □

Zusammenfassung: nicht von vornherein UVRe eines "größeren" VRs

15.9. Satz: Zu jeder Familie $(V_i;\ i\in I)$ von K-VRen existiert eine direkte Summe, welche mit $\bigoplus_{i\in I} V_i$ bezeichnet wird.

Letztlich ist die direkte Summe mit ihrer universellen Eigenschaft nur eine Verallgemeinerung des Basisbegriffs:

15.10. **Satz:** Ist V ein K-VR mit Basis $(b_i\,;\, i\in I)$, so ist $V \cong \bigoplus_{i\in I} K$.

Bew.: K ist ein 1-dim. K-VR. Wir bilden die Hom. $\eta_i : K \to V$, $\eta_i(a) := a b_i$, $i\in I$,

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\eta_i"'] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

für die offenbar $\eta_i(1) = b_i$ gilt. Sind nun ein K-VR W und Hom. $\varphi_i : K \to W$ geg., so sind insb. die Werte $w_i := \varphi_i(1)$ festgelegt. Falls es ein $\varphi : V \to W$ mit $\varphi\circ\eta_i = \varphi_i$ gibt, muss gelten: $w_i = \varphi_i(1) = (\varphi\circ\eta_i)(1) = \varphi(b_i)$, und da $(b_i\,;\, i\in I)$ Basis ist und ein Hom. durch die Werte auf einer Basis eindeutig festliegt, gibt es genau ein solches φ. □

15.11. **Bem.:** Für $I = \{1,\dots,m\}$ sagt dieser Satz, dass ein m-dim. K-VR isomorph zum K^m ist (da K^m dieselbe univ. Eigenschaft hat).
$\hookrightarrow K^m = \underbrace{K\oplus\dots\oplus K}_{m\text{ mal}}$

Aus einer Basis können wir auch allgemeinere direkte Summenzerlegungen erhalten:

15.12. **Satz:** Sei V ein K-VR mit Basis $B = (b_j\,;\, j\in J)$. Wir zerlegen die Menge J in eine Familie $(J_i\,;\, i\in I)$ von paarweise disjunkten Teilmengen $J_i \subseteq J$ und betrachten die Unterräume $V_i := L(b_j\,;\, j\in J_i)$ für $i\in I$.
Dann ist $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$.

Bew.: Gehen analog vor wie eben in 15.10. Die V_i sind Unterräume von V, somit

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\eta_i"'] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

wählen wir als η_i die Inklusionen $V_i \subseteq V$ (als Abb. verstanden). Homomorphismen $\varphi_i : V_i \to W$ legen insb. die Werte $\varphi(b_j)$ auf den Basisel. b_j von V_i $(j\in J_i)$ fest. Insgesamt werden damit auf der ganzen Basis B Werte in V vorgegeben, zu denen es dann genau einen Hom. $\varphi : V \to W$ gibt, der zudem die richtigen Einschränkungen auf die V_i hat. □

15.13. **Bem.:** Den Satz 15.10 können wir umkehren und kommen dadurch zu dem wichtigen Begriff des freien Vektorraumes, d.h. eines Vektorraumes, der eine beliebig vorgegebene Menge B als Basis hat!

15.14. **Def./Konstruktion:** Sei B eine Menge. Wir bilden (wie oben) $V := \bigoplus_{b\in B} K$, d.h. die direkte Summe über $\#B$ viele Exemplare von K.

Die zugehörigen Inklusionen seien $\eta_b: K \to V$ für $b \in B$, wir setzen $\eta_b(1) =: v_b$.
Nach ☒ in 15.8 hat jedes El. von V eine eind. Darstellung als
$v = \sum_{b\in B} \eta_b(\alpha_b) = \sum_{b\in B} \alpha_b \cdot \eta_b(1) = \sum_{b\in B} \alpha_b \cdot v_b$, wobei jeweils nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sind. Somit ist $(v_b;\, b \in B)$ eine Basis von V.
Die Zuordnung $B \ni b \longleftrightarrow v_b \in \{v_b;\, b \in B\}$ ist bijektiv.
Somit können wir die Menge $V(B) := (V \setminus \{v_b;\, b\in B\}) \cup B$ bilden und eine bijektive Abb. $\varphi: V \to V(B)$ definieren durch $\varphi(v) := \begin{cases} b & \text{wenn } v = v_b, \\ v & \text{wenn } v \notin \{v_b;\, b \in B\} \end{cases}$
Mit Satz 15.1 können wir die K-VR-Struktur von V nach $V(B)$ mitnehmen. Dann wird φ ein Isomorphismus, der die Basis $\{v_b;\, b\in B\} \subseteq V$ auf $B \subseteq V(B)$ abbildet; somit ist B Basis von $V(B)$.

15.15 **Def. und Satz (freier Vektorraum):** Sei B eine Menge, V ein K-VR. Der VR V heißt freier Vektorraum über B, wenn mit einer Abb. $\eta: B \to V$ gilt:
Zu jedem K-VR W und jeder Abb. $\lambda: B \to W$ gibt es genau einen Hom. $\varphi: V \to W$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Es gelten: i) zu jeder Menge B gibt es einen freien VR über B, der B als Basis hat.
ii) Je zwei freie Vektorräume über B sind isomorph.
Bew.: i): Klar nach Konstruktion von $V(B)$ wie oben, ii): nach dem Schlussschema wie oben. □
Direkte Summen haben eine weitere universelle Eigenschaft: (surjektiv-Pfeil)

15.16 **Satz:** Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Dann gibt es Epimorphismen $\pi_i : V \twoheadrightarrow V_i$, $i = 1,2$, mit $\ker(\pi_1) = V_2$, $\ker(\pi_2) = V_1$, so dass für jeden K-VR W und zwei Hom. $\psi_i : W \to V_i$ genau ein $\psi : W \to V$ ex. mit $\psi_i = \pi_i \circ \psi$, $i = 1,2$.

$$\begin{tikzcd} V_i & W \arrow[l, "\psi_i"'] \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] \\ V \arrow[u, "\pi_i"] & \end{tikzcd}$$

Bew.: Nehmen den Raum $V := \{(v_1, v_2);\, v_i \in V_i,\, i = 1,2\}$. Dann sind $\pi_i : V \to V_i$, def. durch $\pi_1(v_1, v_2) := v_1$, $\pi_2(v_1, v_2) := v_2$ Epimorphismen mit angeg. Kernen. Sind $\psi_i : W \to V_i$ Hom., def. $\psi(w) := (\psi_1(w), \psi_2(w))$. Dies ist ein Hom. $\psi: W \to V$ und für alle $w \in W$ ist $\pi_i \circ \psi(w) = \pi_i(\psi(w)) = \psi_i(w)$, d.h. $\pi_i \circ \psi = \psi_i$. Dieser ist auch eindeutig. □

15.17 **Kor.:** Sind U, V, W K-VRe, $U \subseteq V$, $V = U \oplus W$, so ist $W \cong V/U$.
Bew.: Nach 15.16 haben wir Epim. $\pi_2 : V \to W$, $\ker(\pi_2) = U$. Sei $\pi: V \to V/U$ der kanonische Epim. Dann ex. $\varphi : V/U \to W$ mit $\varphi \circ \pi = \pi_2$. Da π_2 surj., folgt φ surj. Mit $\ker(\pi) = U = \ker(\pi_2)$ folgt dass φ auch injektiv ist, also Isomorphismus. □

V frei über B $:\Leftrightarrow$ $\exists\, \eta: B \to V$ $\forall\, \lambda: B \underset{\text{Abb.}}{\to} W$, W ein K-VR,

$$\exists!\, \varphi: V \to W: \varphi \circ \eta = \lambda$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "{\exists!\varphi,\ \varphi\circ\eta=\lambda}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\left(\varphi(\underline{\underline{\eta(b)}}) = \underbrace{\lambda(b)}_{\text{vorgeg.}} \right)$$

V ist damit bis auf Isom. eind. best.:
seien V, V' frei über B.

$$\begin{tikzcd} & & V \arrow[loop right, "\exists!\, \mathrm{id}_V"] \\ B \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[urr, bend left, "\eta"] & V' \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi'"] & \\ V \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \psi' \circ \psi = \mathrm{id}_V$

analog $\psi \circ \psi' = \mathrm{id}_{V'}$

Also ψ Isom., d.h. $V \cong V'$.

Beh.: Jeder VR ist frei!

Bew.: Sei V ein K-VR. Sei B eine Basis von V.

sei $\eta: B \to V$, $b \mapsto b \in V$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & W \\ V \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Damit ist V frei über B:

Sei $\lambda: B \to W$ Abb., W K-VR.

Dann: $\exists!\, \varphi: V \to W$, Hom., $\underline{\varphi \circ \eta = \lambda}$, nämlich $\varphi(\underbrace{\eta(b)}_{=b}) := \underbrace{\lambda(b)}_{\text{vorg.}}$. $\square$