Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

ℓ16: Universelles über Algebren

Stichworte: K-Algebra (mit Eins), A-Hom., freie Algebra über B, Konstruktion als $A(B)$, homogene Unterräume $A_m(B)$, Ideale in Algebren, Quotientenalgebra A/U mit univ. Eig.

Wir wollen nun mehr über Algebren und ihre Struktur in Verbindung mit dem Konzept "universelle Eigenschaft" studieren. Wir haben in ℓ7 Algebren bereits kennengelernt als V-VRe, die noch eine weitere Operation "Multiplikation" tragen. Beispiele sind etwa K selbst, die Polynomalgebra $K[T]$, die $n\times n$-Matrizen $K^{n\times n}$. Wir wiederholen zunächst die Definition (vgl. 7.1)

16.1. Def. (K-Algebra mit Eins): Eine K-Algebra mit Eins besteht aus einer Menge A mit zwei ausgezeichneten Elementen $0, e$, einem Körper K und Abbildungen ("Operationen"): Addition $+: V\times V\to V$, Mult. mit Skalaren $\alpha\cdot: K\times V\to V$, Multiplikation $\cdot: V\times V\to V$ so dass gelten:

A1): $(A, 0, +, \alpha\cdot)$ ist K-VR, A2): $\forall x,y,z\in A$: $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$,

A3): $\forall x,y,z\in A$: $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$, $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$,

A4): $\forall \alpha\in K\ \forall x,y\in A$: $\alpha\cdot(x\cdot y) = (\alpha x)\cdot y = x\cdot(\alpha y)$,

A5): $\forall x\in A$: $e\cdot x = x\cdot e = x$, d.h. e ist Einselement (könnten auch 1 dafür schreiben, wollen dies wegen Verwechslungsgefahr mit $1\in K$ aber lieber lassen).

Konvention: • "Algebra" bezeichne im folgenden immer eine K-Algebra mit Eins.
• Verschiedene gleichzeitig betrachtete Algebren haben denselben Grundkörper K.
• Das Operationszeichen "$\cdot$" ("mal") für die Multiplikation werden wir i.a. weglassen, oder aber auch durch spezielle Zeichen wie $\otimes$ ("Tensor") oder $\wedge$ ersetzen.

16.2 (vgl. 7.11) Def. (K-Algebra-Hom.): Seien A, A' Algebren mit Einsel. e, e', sei $\varphi: A\to A'$ eine Abb. Dann heißt φ Algebra-Hom., falls i) φ ist Hom. der Vektorräume A, A', ii) $\forall x,y\in A$: $\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$, iii) $\varphi(e) = e'$. Die Gesamtheit aller Algebra-Hom. $\varphi: A\to A'$ bezeichnen wir mit $A\text{-}\mathrm{Hom}(A,A')$, während $\mathrm{Hom}(A,A')$ für die VR-Homom. reserviert bleibt.

Konstruieren nun das Urbild aller Algebren, nämlich die freie Algebra:

16.3. **Def.:** Es sei A eine Algebra, B eine Menge. Die Algebra A heißt **freie Algebra über B**, wenn es eine Abb. $\eta : B \to A$ gibt mit:

(vgl. mit "univ. Eig." in 7.13)

| zu jeder Algebra A' und jeder Abb. $\lambda : B \to A'$ gibt es genau einen Algebra-Hom. $\varphi \in A\text{-Hom}(A, A')$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

16.4. **Bem.:** Hatten gesehen, dass jeder Vektorraum frei ist. Für Algebren ist dies falsch! Ein Bsp. ist die $\mathbb{R}$-Algebra $A := \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ex. **kein** Algebra-Hom. $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to A' := \mathbb{R}$.

⌈ Betr. die Matrizen $E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + E_4$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$. Dabei ist I das Einsel. in $A = \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Wäre nun $\varphi : A \to A'$ ein A.-Hom., müsste gelten: $0 = \varphi(0) = \varphi(E_1 \cdot E_4) = \varphi(E_1) \cdot \varphi(E_4)$, also muss ein Faktor verschwinden, etwa $\underline{\varphi(E_4) = 0}$. Dann ist $1 = \varphi(I) = \varphi(E_1 + E_4) = \varphi(E_1) + \varphi(E_4) = \varphi(E_1)$, d.h. $\varphi(E_1) = 1$. Nun ist $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_1 = 0$, also $\varphi(E_1) \cdot \varphi(E_3) = \varphi(E_2)\,\varphi(E_1) = 0$, und wegen $\varphi(E_1) = 1$ dann $\varphi(E_2) = \varphi(E_3) = 0$.
Somit ist $\varphi(I) = \varphi(E_2 + E_3) = \varphi(E_2) + \varphi(E_3) = 0$,
↯ zu $1 = \varphi(I) = \varphi(I \cdot I) = \varphi(I) \cdot \varphi(I) = 0$. Hätten wir oben $\underline{\varphi(E_1) = 0}$ angenommen, hätte sich derselbe ↯ ergeben. ⌋

Ü Ist $\mathbb{C}$ freie $\mathbb{R}$-Algebra?

Zeigen vor der Konstruktion von freien Algebren die Eindeutigkeit:

16.5. **Satz:** Je zwei freie Algebren A, A' über derselben Menge B sind isomorph, die zugehörigen Abb.en η, η' stets injektiv. Damit können wir stets $B \subseteq A$ als Inklusion auffassen.

Bew.: i) Seien A, A' frei über B, seien $\eta : B \to A$, $\eta' : B \to A'$ die zugehörigen Abb.en.

- A ist frei: Wähle $\lambda := \eta'$. Dies liefert ein $\varphi \in A\text{-Hom}(A, A')$ mit $\varphi \circ \eta = \eta'$.
- A' ist frei: Wähle $\lambda := \eta$. Dies liefert ein $\varphi' \in A\text{-Hom}(A', A)$ mit $\varphi \circ \eta' = \eta$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ A \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & A' \arrow[ll, dashed, "\varphi'"'] \end{tikzcd}$$

Dann ist $\varphi' \circ \varphi \in A\text{-Hom}(A,A)$, $\varphi \circ \varphi' \in A\text{-Hom}(A',A')$,
und $\varphi' \circ \varphi \circ \eta = \varphi' \circ \eta' = \eta$ und $\varphi \circ \varphi' \circ \eta' = \varphi \circ \eta = \eta'$.
Nun wählen wir in der Def. 16.3 A anstelle A', $\lambda := \eta$. Dann ex. genau ein $\psi \in A\text{-Hom}(A,A)$ mit $\psi \circ \eta = \eta$. Da $\varphi' \circ \varphi$ und id_A dies erfüllen, ist also $\varphi' \circ \varphi = id_A$. Durch Rollentausch folgt $\varphi \circ \varphi' = id_A$, also sind φ und φ' Isomorphismen.
ii): φ und φ' sind Isom. mit $\varphi \circ \eta = \eta'$ und $\varphi' \circ \eta' = \eta$. Ist somit η injektiv, so notwendig auch η' und umgekehrt. In 16.6 werden wir eine freie Algebra über B mit injektivem η konstruieren. Also müssen diese η stets injektiv sein. $\square$

vgl. Sie dies mit 7.7/7.8↓

16.6. **Def./Konstruktion (freie Algebra):** Zu einer Menge B sei $B^n := \{w = b_1 \cdots b_n;\ b_i \in B\}$ die Menge aller Folgen ("Wörter") der Länge n aus Elementen von B ("Alphabet" B).
Wir setzen $B^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n$. Für $n=0$ erhalten wir die leere Folge, notiert als

ε = "leeres Wort"

$\varepsilon \in B^*$. In B^* ist auf natürliche Weise eine "Multiplikation" $*$ durch Aneinanderhängen/Konkatenation/Verketten von Folgen gegeben:
$$b_1 \cdots b_n * b_1' \cdots b_m' := b_1 \cdots b_n b_1' \cdots b_m'$$
Die Länge des Produkts ist die Summe der Längen.
Offensichtlich ist $*$ assoziativ und ε das neutrale Element (B^* enthält immer mindestens das Element ε, auch wenn $B = \emptyset$).
Wir bilden nun $A(B)$, den freien von B^* erzeugten Vektorraum.
Seine El. sind alle endlichen Linearkombinationen der Elemente der Basis B^*:

"polynomielle" Ausdrücke mit den El. von B als "Unbestimmte"

$$A(B) = \{x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b_1,\dots,b_n \in B} \alpha_{b_1 \cdots b_n} b_1 \cdots b_n\}$$
$$= \{x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{w \in B^n} \alpha_w w\}.$$

Menge der n-Tupel von "Buchstaben"

Wir def. die $A_n(B) := \{x = \sum_{w \in B^n} \alpha_w w\} = L(B^n)$, frei von B^n erzeugte Unterräume von $A(B)$, die paarweise trivialen Durchschnitt haben.
Somit gilt: $A(B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n(B)$.

Hier ist $A_0(B)=\{x=\alpha\cdot\varepsilon\}=K$, und $A_1(B)=\{x=\sum_{b\in B}\alpha_b b\}$ der von B erzeugte freie Vektorraum.

In $A(B)$ erklären wir nun eine Multiplikation $\otimes : A(B)\times A(B)\to A(B)$ durch

$$\Big(\sum_{w\in B^*}\alpha_w w\Big)\otimes\Big(\sum_{w'\in B^*}\alpha'_{w'} w'\Big):=\sum_{w,w'\in B^*}\alpha_w\alpha'_{w'}\, ww',$$

wobei $ww'=w*w'$ die oben in 16.6 definierte Multiplikation $*$ in B^*, d.h. das Hintereinanderhängen der Folgen w,w' bedeutet. Damit ist insb. für $w,w'\in B^*$: $w\otimes w'=ww'$.

Ü Rechnen Sie nach, dass diese Operation $\otimes$ assoziativ und distributiv ist, und dass das El. $\varepsilon\in B^0$ das Einselement ist.

Zusammenfassung:

16.7. **Satz**: Sei B eine Menge, B^n die Menge der Folgen der Länge n über B und $B^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}B^n$, $A(B)$ der freie VR über B^*, $A_n(B)$ die von B^n in $A(B)$ erzeugten Unterräume. Dann ist $A(B)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}A_n(B)$.
Mit der eben eingeführten Multiplikation $\otimes$ wird $A(B)$ zu einer Algebra mit Einsel. ε, dem einzigen El. von B^0. Diese Algebra $A(B)$ enthält B und den freien von B erzeugten VR $A_1(B)$. Für die Unterräume $A_n(B)$ gilt $A_n(B)\otimes A_m(B)\subseteq A_{n+m}(B)$.

16.8. **Satz**: Mit der durch die Inklusion $B\subseteq A(B)$ definierten injektiven Abb. $\eta: B\to A(B)$, $\eta(b)=b$ für $b\in B$ ist $A(B)$ freie Algebra über B.

Bew.: Sei A' irgendeine Algebra, $\lambda: B\to A'$ eine geg. Abb. Gibt es überhaupt einen A-Hom. $\varphi: A(B)\to A'$ mit $\varphi\circ\eta=\lambda$, d.h. $\varphi(b)=\lambda(b)$, $b\in B$, so muss für alle $x,y\in A(B)$ gelten: $\varphi(x\otimes y)=\varphi(x)\varphi(y)$. Somit ist insb.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A(B) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

für $w=b_1\cdots b_n\in B^*$: $\varphi(w)=\varphi(b_1\otimes\ldots\otimes b_n)=\varphi(b_1)\cdots\varphi(b_n)=\lambda(b_1)\cdots\lambda(b_n)$, und da ε das Einsel. von $A(B)$ ist, ist auch $\varphi(\varepsilon)=\varepsilon'$ Einsel. von A'.

Der A-Hom. φ muss auf B^* also notwendig folgende Werte annehmen:

$$\varphi(\varepsilon)=e',\quad \varphi(b)=\lambda(b),\quad \varphi(b_1\cdots b_n)=\lambda(b_1)\cdots\lambda(b_n)\quad \text{für } b,b_1,\ldots,b_n\in B.$$

Basis von $A(B)$

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A(B) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Da $A(B)$ der freie VR über B^* ist, lässt sich diese Vorgabe auf genau eine Weise zu einem VR-Hom. $\varphi : A(B) \to A'$ fortsetzen. Dies ist aber auch schon ein A.-Hom, denn auf B^* ist $\varphi(w)\cdot\varphi(w') = \varphi(ww')$, somit $\varphi(\sum_w \alpha_w w)\cdot\varphi(\sum_{w'} \alpha'_{w'} w')$
$= \left(\sum_w \alpha_w \varphi(w)\right)\cdot\left(\sum_{w'} \alpha'_{w'} \varphi(w')\right) = \sum_{w,w'} \alpha_w \alpha'_{w'} \underbrace{\varphi(w)\varphi(w')}_{=\varphi(ww')} = \varphi\left(\sum_{w,w'} \alpha_w \alpha'_{w'} ww'\right)$

$= \varphi\left(\left(\sum_w \alpha_w w\right) \otimes \left(\sum_{w'} \alpha'_{w'} w'\right)\right)$. Damit ist ein $\varphi \in$ A.-Hom$(A(B), A')$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$ gefunden, und die Konstruktion zeigt, dass es nur diesen geben kann.
Die benutzte Abb. η ist injektiv (s. Satz 16.5).

16.9. **Def.:** Die Unterräume $A_n(B) := L(B^n)$ heißen homogene Unterräume vom Grad n von $A(B)$, ihre Elemente homogen vom Grad n. ($\to$ vgl. "homogene Polynome")

16.10. **Bem.:** Wir haben nun zu jeder Menge B eine freie Algebra $A(B)$ konstruiert, damit aber, anders als bei Vektorräumen, noch nicht alle Algebren erfasst. Aber:

16.11. **Satz:** Jede Algebra ist homomorphes Bild einer freien Algebra, d.h. zu jeder Algebra A' gibt es eine Menge B und einen surjektiven Algebra-Homom. $\varphi : A(B) \to A'$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "id_{A'}"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A(A') \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Bew.: Wähle $B := A'$, und als $\lambda : B \to A'$ wähle $\lambda := id_{A'}$.
Da $A(B)$ frei ist über B, gibt es dann einen Homom. $\varphi : A(A') \to A'$, der λ fortsetzt. Da λ surj., ist φ surj. □

16.12. **Bem.:** Die hier benutzte Algebra $A(A')$ ist selbst für "kleine" A' riesig. Der eben konstruierte Hom. φ kann keinesfalls injektiv sein. Da jeder A.-Hom. auch ein VR-Hom. ist (nach Vergessen der Multiplikation in den Algebren), führt uns dies auf die Untersuchung der Kerne von A.-Hom. Dazu:

16.13. **Def. (Ideal):** Sei A eine Algebra. Eine Teilmenge $U \subseteq A$ heißt (zweiseitiges) Ideal in A, wenn i) U ein Unterraum von A ist, ii) $\forall u \in U\ \forall x,y \in A : xuy \in U$,
abgekürzt: $AUA \subseteq U$. [Für ein linksseitiges Ideal gilt $AU \subseteq U$]
(Oft wird mit "Ideal" das linksseitige in Ringen gemeint.)

Der Ideal-Begriff ist fundamental zum Studium von Algebren und Verwandten.

16.14. **Bsp.:** Die Menge $\mathcal{J}(f) = \{g \in K[T];\ \Psi \mid g\}$ für $\Psi = \mathrm{Mipo}(f)$ in 10.8 ist ein Ideal in der Polynomalgebra $K[T]$.

16.15. **Satz:** Ist $\varphi \in A\text{-}\mathrm{Hom}(A, A')$, $U := \{x \in A;\ \varphi(x) = 0\}$ der Kern von φ, so ist $U = \ker\varphi$ ein Ideal in A.

Bew.: $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,A')$ zeigt, dass U ein Unterraum ist. Für $u \in U$ ist ja $\varphi(u) = 0$ und somit für bel. $x, y \in A$: $\varphi(xuy) = \varphi(x)\varphi(u)\varphi(y) = \varphi(x)\cdot 0 \cdot \varphi(y) = 0$, d.h. $xuy \in U = \ker(\varphi)$. □

(Die Umkehrung dieses Satzes 16.15 in 16.17 ist ein sehr wirksames Hilfsmittel zur Konstruktion neuer Algebren mit vorgegebenen Eigenschaften.)

16.16. **Bsp. (für Ideale):** • In $A(B)$ sind alle Unterräume $U_m := \bigoplus_{n \geq m} A_n(B)$, $m = 0, 1, \dots$ Ideale, denn für jedes El. kann durch Multiplikation mit einem anderen der Grad höchstens wachsen.

• Ist A eine bel. Algebra, $S \subseteq A$ bel. Menge, so ex. stets ein Ideal in A, das S enthält (etwa A selbst). Da der Durchschnitt von beliebig vielen Idealen selbst wieder ein Ideal ist (Ü warum?), können wir den Durchschnitt aller S enthaltenden Ideale bilden und erhalten das Ideal:

$$U(S) := \bigcap_{\substack{S \subseteq U \subseteq A \\ U \text{ Ideal}}} U.$$

Ü $U(S)$ besteht aus allen endlichen Summen von El. der Art xsy mit $x, y \in A$, $s \in S$.

16.17 **Def.:** Das Ideal $U(S)$ heißt das von S erzeugte Ideal in A.

16.18. **Satz und Def. (Quotienten-Algebra):** Sei A eine Algebra, $U \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es eine Algebra A/U und einen surjektiven A-Hom. $\pi: A \to A/U$ mit $\ker(\pi) = U$. A/U heißt Quotienten-Algebra, π heißt kanonischer Epimorphismus. A/U hat die folgende univ. Eigenschaft und ist durch sie eindeutig charakterisiert: Für jede Algebra A' und jeden A-Hom. $\varphi: A \to A'$ mit $U \subseteq \ker(\varphi)$ ex. genau ein Hom. $\psi: A/U \to A'$ mit $\varphi = \psi \circ \pi$.

$\ker(\pi) = U \subseteq \ker(\varphi)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \\ A/U \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Bew.: Hatten in 15.2 einen analogen Satz für VRe bewiesen, auf den wir zurückgreifen. Wir vergessen zunächst die Multiplikation in unseren Algebren, so dass nur noch VRe und VR-Hom. übrigbleiben; insb. ist U ein Unterraum von A, und wir haben genau die bei VRen schon betrachtete Situation.

Demnach ex. ein VR A/U und ein VR-Epim. $\pi: A \to A/U$ wie im Satz gefordert, solange wir nicht die Algebra-Multiplikation berücksichtigen.
Dafür genügt z.z.: i): Definieren in A/U eine Multiplikation, die die schon vorhandene VR-Struktur zu einer Algebra mit Eins erweitert, so dass π ein A.-Hom. wird, ii): zeigen, dass damit auch Ψ ein A.-Hom. wird.
Zu i): Sei $\bar{x}, \bar{y} \in A/U$. Da π surjektiv, ex. $x, y \in A$ mit $\pi(x) = \bar{x}$, $\pi(y) = \bar{y}$.
Nun def. die Mult. in A/U durch (*) $\bar{x} \cdot \bar{y} := \pi(xy)$, d.h. $\pi(x) \cdot \pi(y) := \pi(xy)$.
Da π den Kern U hat, ex. verschiedene x, die alle von π auf $\bar{x}$ abgebildet werden, so dass wir zunächst prüfen müssen, ob mit (*) eine wohldefinierte Abb., d.h. eine vernünftige Operation def. ist.
Dazu sei also $\pi(x) = \pi(x') = \bar{x}$, $\pi(y) = \pi(y') = \bar{y}$. Dann ist $\pi(x - x') = \pi(x) - \pi(x') = 0$, dito $\pi(y - y') = 0$, und somit sind $u := x - x' \in U = \ker(\varphi)$, $v := y - y' \in U = \ker(\varphi)$, d.h. es sind $x = x' + u$, $y = y' + v$ mit $u, v \in U = \ker(\varphi)$.
Also ist $xy = (x'+u)(y'+v) = x'y' + x'v + uy' + uv = x'y' + \underbrace{(ex'v + uy'e + euve)}_{\in U, \text{ da } U \text{ Ideal}}$,
wobei e das Einsel. von A ist.
Somit ist $xy = x'y' + w$ mit $w \in U = \ker(\varphi)$, d.h. $\pi(xy) = \pi(x'y') + \pi(w) = \pi(x'y')$.
Durch (*) ist also eine Op. in A/U definiert. Prüfen wir die Axiome in 16.1:
A2): $(\bar{x}\bar{y}) \cdot \bar{z} = \pi(xy) \cdot \pi(z) = \pi((xy) \cdot z) = \pi(x(yz)) = \pi(x)\pi(yz) = \bar{x} \cdot (\bar{y}\bar{z})$.
A3): $(\bar{x} + \bar{y})\bar{z} = \pi((x+y)z) = \pi(xz + yz) = \pi(xz) + \pi(yz) = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$,
analog die andere Formel.
A4): $\alpha(\bar{x}\bar{y}) = \alpha\pi(xy) = \pi(\alpha xy) = \pi((\alpha x)y) = (\overline{\alpha x})\bar{y} = \pi(x(\alpha y)) = \bar{x} \cdot (\overline{\alpha y})$.
A5): Sei $\bar{e} = \pi(e)$, dann ist $\bar{e}\bar{x} = \pi(ex) = \pi(x) = \bar{x} = \pi(x) = \pi(xe) = \bar{x}\bar{e}$,
also ist $\bar{e}$ das Einsel. von A/U.
Mit der durch (*) mittels π von A auf A/U übertragenen Mult. ist A/U somit eine Algebra und wegen (*) ist π ein A.-Hom. Dies zeigt i).
Zu ii): Es ex. VR-Hom. Ψ mit $\varphi = \Psi \circ \pi$, d.h. $\forall x \in A: \varphi(x) = (\Psi \circ \pi)(x) = \Psi(\pi(x)) = \Psi(\bar{x})$,
wo $\bar{x} = \pi(x)$, dann ist insb. $\Psi(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \Psi(\pi(xy)) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \Psi(\bar{x})\Psi(\bar{y})$, $\Psi(\bar{e}) = \Psi(\pi(e)) = \varphi(e)$
Einsel. von A'. Also ist Ψ ein A.-Hom. □