Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

ℓ16: Universelles über Algebren

Stichworte: K-Algebra (mit Eins), A-Hom., freie Algebra über B, Konstruktion als $A(B)$, homogene Unterräume $A_m(B)$, Ideale in Algebren, Quotientenalgebra A/U mit univ. Eig.

Wir wollen nun mehr über Algebren und ihre Struktur in Verbindung mit dem Konzept "universelle Eigenschaft" studieren. Wir haben in ℓ7 Algebren bereits kennengelernt als K-VRe, die noch eine weitere Operation "Multiplikation" tragen. Beispiele sind etwa K selbst, die Polynomalgebra $K[T]$, die $n\times m$-Matrizen $K^{n\times m}$. Wir wiederholen zunächst die Definition (vgl. 7.1)

16.1. Def. (K-Algebra mit Eins): Eine K-Algebra mit Eins besteht aus einer Menge A mit zwei ausgezeichneten Elementen $0, e$, einem Körper K und Abbildungen ("Operationen"): Addition $+: A\times A\to A$, Mult. mit Skalaren $\alpha\cdot: K\times A\to A$, Multiplikation $\cdot: A\times A\to A$ so dass gelten:

$A1)$: $(A, 0, +, \alpha\cdot)$ ist K-VR, $A2)$: $\forall x,y,z\in A: (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$,

$A3)$: $\forall x,y,z\in A: (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$, $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$,

$A4)$: $\forall \alpha\in K\ \forall x,y\in A: \alpha\cdot(x\cdot y) = (\alpha x)\cdot y = x\cdot(\alpha y)$,

$A5)$: $\forall x\in A: e\cdot x = x\cdot e = x$, d.h. e ist Einselement (könnten auch 1 dafür schreiben, wollen dies wegen Verwechslungsgefahr mit $1\in K$ aber lieber lassen).

Konvention: • "Algebra" bezeichne im folgenden immer eine K-Algebra mit Eins.
• Verschiedene gleichzeitig betrachtete Algebren haben denselben Grundkörper K.
• Das Operationszeichen "$\cdot$" ("mal") für die Multiplikation werden wir i.a. weglassen, oder aber auch durch spezielle Zeichen wie $\otimes$ ("Tensor") oder $\wedge$ ersetzen.

16.2 vgl. 7.11 Def. (K-Algebra-Hom.): Seien A, A' Algebren mit Einsel. e, e', sei $\varphi: A\to A'$ eine Abb. Dann heißt φ Algebra-Hom., falls i) φ ist Hom. der Vektorräume A, A', ii) $\forall x,y\in A: \varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$, iii) $\varphi(e) = e'$. Die Gesamtheit aller Algebra-Hom. $\varphi: A\to A'$ bezeichnen wir mit $A\text{-}Hom(A,A')$, während $Hom(A,A')$ für die VR-Homom. reserviert bleibt.

univ. Eig.:

Quot-VR:

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{U \subseteq \ker\varphi}} \subseteq V \arrow[r, "\forall \varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dashed, "\exists ! \psi"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "\text{\char34}"] & \end{tikzcd}$$

$V/U = \{v + U ; v \in V\}$

ψ Isom., falls φ surj. & $\ker\varphi = U$

$\hookrightarrow V/U \cong W$

freier VR:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\forall \lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & W \\ V(B) \arrow[ur, dashed, "\exists ! \Psi"'] & \end{tikzcd}$$

$V(B) = \bigoplus_{b \in B} K$ $\rightsquigarrow$ jeder VR ist frei

$\bigoplus$:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\forall \varphi_i"] \arrow[d, "\eta_i"'] & W \\ \bigoplus_{i \in I} V_i \arrow[ur, dashed, "\exists ! \varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Bsp. A.-Hom.:

Betr. $A = \mathbb{C}$, $A' = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ als $\mathbb{R}$-Algebra.

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$
$$\alpha + i\beta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$ ist A.-Hom.!

Haben $\varphi(i)\cdot\varphi(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓

$\overset{!}{=} \varphi(i \cdot i) = \varphi(-1) = -\varphi(1) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ↲

Konstruieren nun das Urbild aller Algebren, nämlich die <u>freie Algebra</u>:

16.3. <u>Def.</u>: Es sei A eine Algebra, B eine Menge. Die Algebra A heißt <u>freie Algebra über B</u>, wenn es eine Abb. $\eta: B \to A$ gibt mit:

(vgl. mit "univ. Eig." in 7.13)

| zu jeder Algebra A' und jeder Abb. $\lambda: B \to A'$ gibt es genau einen Algebra-Hom. $\varphi \in \underline{A\text{-Hom}}(A, A')$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

16.4. <u>Bem.</u>: Hatten gesehen, dass jeder Vektorraum frei ist. Für Algebren ist dies falsch!
Ein Bsp. ist die $\mathbb{R}$-Algebra $A := \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ex. <u>kein</u> Algebra-Hom. $\varphi: \mathbb{R}^{2\times 2} \to A' := \mathbb{R}$.

⌈ Betr. die Matrizen $E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + E_4$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3$. Dabei ist I das Einsel. in $A = \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Wäre nun $\varphi: A \to A'$ ein A.-Hom., müsste gelten: $0 = \varphi(0) = \varphi(E_1 \cdot E_4) = \varphi(E_1) \cdot \varphi(E_4)$, also muss ein Faktor verschwinden, etwa $\underline{\varphi(E_4) = 0}$. Dann ist $1 = \varphi(I) = \varphi(E_1 + E_4)$ $= \varphi(E_1) + \varphi(E_4) = \varphi(E_1)$, d.h. $\varphi(E_1) = 1$. Nun ist $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_1 = 0$, also $\varphi(E_1) \cdot \varphi(E_3) = \varphi(E_2)\varphi(E_1) = 0$, und wegen $\varphi(E_1) = 1$ dann $\varphi(E_2) = \varphi(E_3) = 0$.
Somit ist $\varphi(J) = \varphi(E_2 + E_3) = \varphi(E_2) + \varphi(E_3) = 0$,
↯ zu $\underline{1 = \varphi(I)} = \varphi(J \cdot J) = \varphi(J) \cdot \varphi(J) = 0$. Hätten wir oben $\underline{\varphi(E_1) = 0}$ angenommen, hätte sich derselbe ↯ ergeben. ⌋

→ Ü Ist $\mathbb{C}$ freie $\mathbb{R}$-Algebra?

Zeigen vor der Konstruktion von freien Algebren die Eindeutigkeit:

16.5. <u>Satz</u>: Je zwei freie Algebren A, A' über derselben Menge B sind isomorph, die zugehörigen Abb.en η, η' stets injektiv. Damit können wir stets $B \subseteq A$ als Inklusion auffassen.

<u>Bew.</u>: i): Seien A, A' frei über B, seien $\eta: B \to A$, $\eta': B \to A'$ die zugehörigen Abb.en.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

• A ist frei: wähle $\lambda := \eta'$. Dies liefert ein $\varphi \in A\text{-Hom}(A, A')$ mit $\varphi \circ \eta = \eta'$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta'"'] & A \\ A' \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

• A' ist frei: wähle $\lambda := \eta$. Dies liefert ein $\varphi' \in A\text{-Hom}(A', A)$ mit $\varphi' \circ \eta' = \eta$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ A \arrow[rr, dashed, bend left, "\varphi"] & & A' \arrow[ll, dashed, bend left, "\varphi'"] \end{tikzcd}$$

Frage: Ist $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{C}$ freie Algebra?

Antwort: nein! Denn es ex. kein A.-Hom. $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$.

Sonst wäre $\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ A.-Hom.

$$\left\ulcorner \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd} \right\lrcorner$$

Dann:

$$\varphi(-1) = \varphi(i \cdot i) = \varphi(i) \cdot \varphi(i) = \varphi(i)^2$$

$$\varphi(-1) = -\varphi(1) = -1$$

Also: $\varphi(i)^2 = -1$ mit $\varphi(i) \in \mathbb{R}$ ↯.

Dann ist $\varphi'\circ\varphi \in A\text{-Hom}(A,A)$, $\varphi\circ\varphi' \in A\text{-Hom}(A',A')$,
und $\varphi'\circ\varphi\circ\eta = \varphi'\circ\eta' = \eta$ und $\varphi\circ\varphi'\circ\eta' = \varphi\circ\eta = \eta'$.
Nun wählen wir in der Def. 16.3 A anstelle A', $\lambda := \eta$. Dann ex. genau ein $\psi \in A\text{-Hom}(A,A)$ mit $\psi\circ\eta = \eta$. Da $\varphi'\circ\varphi$ und id_A dies erfüllen, ist also $\varphi'\circ\varphi = id_A$. Durch Rollentausch folgt $\varphi\circ\varphi' = id_{A'}$, also sind φ und φ' Isomorphismen.
ii): φ und φ' sind Isom. mit $\varphi\circ\eta = \eta'$ und $\varphi'\circ\eta' = \eta$. Ist somit η injektiv, so notwendig auch η' und umgekehrt. In 16.6 werden wir eine freie Algebra über B mit injektivem η konstruieren. Also müssen diese η stets injektiv sein. $\square$

vgl. Sie dies mit 7.7/7.8↓

16.6. Def./Konstruktion (freie Algebra): Zu einer Menge B sei $B^n := \{w = b_1\cdots b_n;\ b_i \in B\}$ die Menge aller Folgen ("Wörter") der Länge n aus Elementen von B ("Alphabet" B).
Wir setzen $B^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n$. Für $n=0$ erhalten wir die leere Folge, notiert als

ε = "Leeres Wort"

$\varepsilon \in B^*$. In B^* ist auf natürliche Weise eine "Multiplikation" $*$ durch Aneinanderhängen/Konkatenation/Verketten von Folgen gegeben:

$$b_1\cdots b_n * b_1'\cdots b_m' := b_1\cdots b_n b_1'\cdots b_m'$$

Die Länge des Produkts ist die Summe der Längen.

$w*\varepsilon = w$

Offensichtlich ist $*$ assoziativ und ε das neutrale Element (B^* enthält immer mindestens das Element ε, auch wenn $B=\emptyset$).
Wir bilden nun $A(B)$, den freien von B^* erzeugten Vektorraum.
Seine El. sind alle endlichen Linearkombinationen der Elemente der Basis B^*:

"polynomielle" Ausdrücke mit den El. von B als "Unbestimmte" ↳ nicht komm.

$$A(B) := \{x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b_1,\dots,b_n \in B} \alpha_{b_1\cdots b_n} b_1\cdots b_n;\ \text{die } \alpha_{b_1\cdots b_n} \neq 0 \text{ nur endl. oft}\}$$

$$= \{x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{w\in B^n} \alpha_w w;\ \text{die } \alpha_w \neq 0 \text{ nur endl. oft}\}$$

Wir def. die $A_n(B) := \{x = \sum_{w\in B^n} \alpha_w w\} = L(\underbrace{B^n}_{\text{Menge der } n\text{-Tupel von "Buchstaben"}})$, freie von B^n erzeugte Unterräume von $A(B)$, die paarweise trivialen Durchschnitt haben.
Somit gilt: $A(B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n(B)$.

Bsp. für $A(B)$: $\quad B = \{X, Y, Z\}$

$B^0 = \{\varepsilon\}, \quad B^1 = \{X, Y, Z\},$

$B^2 = \{XY, XZ, YZ, YX, ZX, ZY, XX, YY, ZZ\}$

$XY \neq YX$

$$B^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n$$

Multipl. in B^*: $\quad b_1 \cdots b_n * b_1' \cdots b_m' = b_1 \cdots b_n b_1' \cdots b_m'$

z.B. $\quad XY * XZYYZ = XYXZYYZ$

Jetzt: $A(B) = \{ \sum_{w \in B^*} \alpha_w \cdot w \; ; \; \alpha_w \in K \text{ nur endl. oft} \}$

K-VR $\quad \rightsquigarrow \; \hookrightarrow$ ist K-Algebra mit Eins ε

z.B. $\quad 2X + 3YZXX - 6Y \in A(B)$

Mult. in $A(B)$:
$(\sum \alpha_w \cdot w) \otimes (\sum \alpha_{w'}' w') = \sum \alpha_w \alpha_{w'}' ww'$

z.B. $(2X + 3XYZ) \otimes (-ZXY + 10Z)$

$= -2\,XZXY + 20\,XZ - 3\,XYZZXY + 30\,XYZZ$

$= -2\,X \otimes ZXY + 20\,X \otimes Z - \cdots \qquad XY \neq YX$

Hier ist $A_0(B) = \{x = \alpha \cdot \varepsilon\} = K$, und $A_1(B) = \{x = \sum_{b \in B} \alpha_b b\}$ der von B erzeugte freie Vektorraum.

In $A(B)$ erklären wir nun eine Multiplikation $\otimes : A(B) \times A(B) \to A(B)$ durch

$$\Big(\sum_{w \in B^*} \alpha_w w\Big) \otimes \Big(\sum_{w' \in B^*} \alpha'_{w'} w'\Big) := \sum_{w, w' \in B^*} \alpha_w \alpha'_{w'} ww',$$

wobei $ww' = w * w'$ die oben in 16.6 definierte Multiplikation $*$ in B^*, d.h. das Hintereinanderhängen der Folgen w, w' bedeutet. Damit ist insb. für $w, w' \in B^*$: $w \otimes w' = ww'$.

Ü Rechnen Sie nach, dass diese Operation $\otimes$ assoziativ und distributiv ist, und dass das El. $\varepsilon \in B^0$ das Einselement ist.

Zusammenfassung:

16.7. Satz: Sei B eine Menge, B^n die Menge der Folgen der Länge n über B und $B^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n$, $A(B)$ der freie VR über B^*, $A_n(B)$ die von B^n in $A(B)$ erzeugten Unterräume. Dann ist $A(B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n(B)$.
Mit der eben eingeführten Multiplikation $\otimes$ wird $A(B)$ zu einer Algebra mit Einsel. ε, dem einzigen El. von B^0. Diese Algebra $A(B)$ enthält B und den freien von B erzeugten VR $A_1(B)$. Für die Unterräume $A_n(B)$ gilt $A_n(B) \otimes A_m(B) \subseteq A_{n+m}(B)$.

16.8. Satz: Mit der durch die Inklusion $B \subseteq A(B)$ definierten injektiven Abb. $\eta : B \to A(B)$, $\eta(b) = b$ für $b \in B$ ist $A(B)$ freie Algebra über B.

Bew.: Sei A' irgendeine Algebra, $\lambda : B \to A'$ eine geg. Abb. Gibt es überhaupt einen A-Hom. $\varphi : A(B) \to A'$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$, d.h. $\varphi(b) = \lambda(b)$, $b \in B$, so muss für alle $x, y \in A(B)$ gelten: $\varphi(x \otimes y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Somit ist insb.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A(B) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

für $w = b_1 \cdots b_n \in B^*$: $\varphi(w) = \varphi(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = \varphi(b_1) \cdots \varphi(b_n) = \lambda(b_1) \cdots \lambda(b_n)$, und da ε das Einsel. von $A(B)$ ist, ist auch $\varphi(\varepsilon) = e'$ Einsel. von A'.
Der A-Hom. φ muss auf B^* also notwendig folgende Werte annehmen:

$$\varphi(\varepsilon) = e', \quad \varphi(b) = \lambda(b), \quad \varphi(b_1 \cdots b_n) = \lambda(b_1) \cdots \lambda(b_n) \text{ für } b, b_1, \dots, b_n \in B.$$

in $A(B)$, $B = \{X, Y, Z\}$, ist

$2XY - XZ + 16XX$ homogen vom Grad 2

$XYZZX$ homogen vom Grad 5

$X - 3Y + 4Z$ homogen vom Grad 1

$X - 3X + 4Z = -2X + 4Z$ homogen "

$$\begin{tikzcd} \overset{\text{Basis von } A(B)}{B^*} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A(B) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Da $A(B)$ der freie VR über B^* ist, lässt sich diese Vorgabe auf genau eine Weise zu einem VR-Hom. $\varphi: A(B) \to A'$ fortsetzen. Dies ist aber auch schon ein A-Hom, denn auf B^* ist $\varphi(w)\cdot\varphi(w') = \varphi(ww')$, somit $\varphi(\sum_w \alpha_w w)\cdot\varphi(\sum_{w'} \alpha'_{w'} w')$

$$= \Big(\sum_w \alpha_w \varphi(w)\Big)\cdot\Big(\sum_{w'} \alpha'_{w'} \varphi(w')\Big) = \sum_{w,w'} \alpha_w \alpha'_{w'} \underbrace{\varphi(w)\varphi(w')}_{=\varphi(ww')} = \varphi\Big(\sum_{w,w'} \alpha_w \alpha'_{w'}\, ww'\Big)$$

$$= \varphi\Big(\Big(\sum_w \alpha_w w\Big) \otimes \Big(\sum_{w'} \alpha'_{w'} w'\Big)\Big).$$

Damit ist ein $\varphi \in A\text{-Hom}(A(B), A')$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$ gefunden, und die Konstruktion zeigt, dass es nur diesen geben kann. Die benutzte Abb. η ist injektiv (s. Satz 16.5). □

16.9. **Def.:** Die Unterräume $A_n(B) := L(B^n)$ heißen homogene Unterräume vom Grad n von $A(B)$, ihre Elemente homogen vom Grad n.

16.10. **Bem.:** Wir haben nun zu jeder Menge B eine freie Algebra $A(B)$ konstruiert, damit aber, anders als bei Vektorräumen, noch nicht alle Algebren erfasst. Aber:

16.11. **Satz:** Jede Algebra ist homomorphes Bild einer freien Algebra, d.h. zu jeder Algebra A' gibt es eine Menge B und einen surjektiven Algebra-Homom. $\varphi: A(B) \to A'$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "id_{A'}"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A(A') \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Bew.: Wähle $B := A'$, und als $\lambda: B \to A'$ wähle $\lambda := id_{A'}$. Da $A(B)$ frei ist über B, gibt es dann einen Homom. $\varphi: A(A') \to A'$, der λ fortsetzt. Da λ surj., ist φ surj. □

16.12. **Bem.:** Die hier benutzte Algebra $A(A')$ ist selbst für "kleine" A' riesig. Der eben konstruierte Hom. φ kann keinesfalls injektiv sein. Da jeder A-Hom. auch ein VR-Hom. ist (nach Vergessen der Multiplikation in den Algebren), führt uns dies auf die Untersuchung der Kerne von A-Hom. Dazu:

16.13. **Def. (Ideal):** Sei A eine Algebra. Eine Teilmenge $U \subseteq A$ heißt (zweiseitiges) Ideal in A, wenn i) U ein Unterraum von A ist, ii) $\forall u \in U\ \forall x,y \in A: xuy \in U$,

abgekürzt: $AUA \subseteq U$. Für ein linksseitiges Ideal gilt $AU \subseteq U$.

(Oft wird mit "Ideal" das linksseitige in Ringen gemeint.)

Bsp. für Ideale in Algebren

1. von $p \in K[T]$ erzeugte Ideal
$$\mathcal{J}(p) = \{ q \in K[T] ; \ p \mid q \} \quad \text{in } K[T] = A$$
2. Kerne von Algebrenhomomorphismen
3. beliebige Durchschnitte von Idealen

$\ulcorner$ U, U' Ideale in A: Dann $U \cap U'$ Ideal
denn: $U \cap U'$ UVR ✓, $A \cdot (U \cap U') \cdot A \subseteq U \cap U'$
d.h. $x, y \in A$, $w \in U \cap U'$
$\Rightarrow \underline{xwy} \in U$ und $xwy \in U'$
$\Rightarrow xwy \in U \cap U'$ $\lrcorner$

4. das von einer Menge $S \subseteq A$ erzeugte Ideal
$$U(S) = \bigcap_{\substack{S \subseteq U \subseteq A \\ U \text{ Ideal}}} U$$
$$\overset{!}{=} \Big\{ \sum_{\substack{x, y \in A \\ s \in S}} \alpha_{x,s,y} \, \underline{x \cdot s \cdot y} \ ; \ \alpha_{x,s,y} \in K, \text{ nur endl. oft } \alpha_{x,y,s} \neq 0 \Big\}$$

Etwa $U(\underbrace{\{T^2+1\}}_{=S})$ in $A = \mathbb{R}[T]$
$= \mathcal{J}(T^2+1)$ aus Bsp. 1

$\leftarrow$ $\boxed{i^2+1=0}$

univ. Eig.: Sei $A = \mathbb{R}[T]$, $U = \mathcal{J}(T^2+1)$

$\underline{\mathcal{J}(T^2+1) \subseteq \ker\varphi}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[T] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{R}[T]/\mathcal{J}(T^2+1) \arrow[ur, dashed, "\exists! \psi"'] & \end{tikzcd}$$

$p \mapsto p + \mathcal{J}(T^2+1)$

$\exists! \psi$: $\psi \circ \pi = \varphi$
Isom.

$\varphi: T \mapsto i$, $\sum \alpha_j T^j \mapsto \sum \alpha_j i^j$

$\searrow$ $\ker\varphi = \mathcal{J}(T^2+1)$ $\hookrightarrow$ ψ inj.
• ψ surj., da φ surj.

A-Hom.: $\varphi: A(B) \to A'$
$\rightsquigarrow \varphi(w \otimes w') = \varphi(w) \cdot \varphi(w')$
Mal in $A(B)$ — Mal in A'

Der Ideal-Begriff ist fundamental zum Studium von Algebren und Verwandten.

16.14. **Bsp.:** Die Menge $\mathcal{J}(f) = \{g \in K[T];\ \Psi \mid g\}$ für $\Psi = \mathrm{Mipo}(f)$ in 10.8 ist ein Ideal in der Polynomalgebra $K[T]$.

16.15. **Satz:** Ist $\varphi \in A\text{-}\mathrm{Hom}(A, A')$, $U := \{x \in A;\ \varphi(x) = 0\}$ der Kern von φ, so ist $U = \ker\varphi$ ein Ideal in A.

Bew.: $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, A')$ zeigt, dass U ein Unterraum ist. Für $u \in U$ ist ja $\varphi(u) = 0$ und somit für bel. $x, y \in A$: $\varphi(xuy) = \varphi(x)\varphi(u)\varphi(y) = \varphi(x) \cdot 0 \cdot \varphi(y) = 0$, d.h. $xuy \in U = \ker(\varphi)$. □

(Die Umkehrung dieses Satzes 16.15 in 16.17 ist ein sehr wirksames Hilfsmittel zur Konstruktion neuer Algebren mit vorgegebenen Eigenschaften.)

16.16. **Bsp. (für Ideale):** • In $A(B)$ sind alle Unterräume $U_m := \bigoplus_{n \geq m} A_n(B)$, $m = 0, 1, \ldots$ Ideale, denn für jedes El. kann durch Multiplikation mit einem anderen der Grad höchstens wachsen.

• Ist A eine bel. Algebra, $S \subseteq A$ bel. Menge, so ex. stets ein Ideal in A, das S enthält (etwa A selbst). Da der Durchschnitt von beliebig vielen Idealen selbst wieder ein Ideal ist (Ü warum?), können wir den Durchschnitt aller S enthaltenden Ideale bilden und erhalten das Ideal:

$$U(S) := \bigcap_{\substack{S \subseteq U \subseteq A \\ U \text{ Ideal}}} U.$$

Ü $U(S)$ besteht aus allen endlichen Summen von El. der Art xsy mit $x, y \in A$, $s \in S$.

16.17 **Def.:** Das Ideal $U(S)$ heißt das von S erzeugte Ideal in A.

16.18. **Satz und Def. (Quotienten-Algebra):** Sei A eine Algebra, $U \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es eine Algebra A/U und einen surjektiven A-Hom. $\pi: A \to A/U$ mit $\ker(\pi) = U$.
A/U heißt Quotienten-Algebra, π heißt kanonischer Epimorphismus.
A/U hat die folgende univ. Eigenschaft und ist durch sie eindeutig charakterisiert: Für jede Algebra A' und jeden A-Hom. $\varphi: A \to A'$ mit $U \subseteq \ker(\varphi)$ ex. genau ein A-Hom. $\Psi: A/U \to A'$ mit $\varphi = \Psi \circ \pi$.

$\ker(\pi) = U \subseteq \ker(\varphi)$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \\ A/U \arrow[ur, dashed, "\exists!\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Bew.: Hatten in 15.2 einen analogen Satz für VRe bewiesen, auf den wir zurückgreifen. Wir vergessen zunächst die Multiplikation in unseren Algebren, so dass nur noch VRe und VR-Hom. übrigbleiben; insb. ist U ein Unterraum von A, und wir haben genau die bei VRen schon betrachtete Situation.

Demnach ex. ein VR A/U und ein VR-Epim. $\pi : A \to A/U$, $a \mapsto a+U$ wie im Satz gefordert, solange wir nicht die Algebra-Multiplikation berücksichtigen.
Dafür genügt z.z.: i): Definieren in A/U eine Multiplikation, die die schon vorhandene VR-Struktur zu einer Algebra mit Eins erweitert, so dass π ein A.-Hom. wird, ii): zeigen, dass damit auch Ψ ein A.-Hom. wird.
Zu i): Sei $\bar{x}, \bar{y} \in A/U$. Da π surjektiv, ex. $x, y \in A$ mit $\pi(x) = \bar{x}$, $\pi(y) = \bar{y}$.
Nun def. die Mult. in A/U durch (*) $\bar{x} \cdot \bar{y} := \pi(xy)$, d.h. $\pi(x) \cdot \pi(y) := \pi(xy)$.
Da π den Kern U hat, ex. verschiedene x, die alle von π auf $\bar{x}$ abgebildet werden, so dass wir zunächst prüfen müssen, ob mit (*) eine wohldefinierte Abb., d.h. eine vernünftige Operation def. ist.
Dazu sei also $\pi(x) = \pi(x') = \bar{x}$, $\pi(y) = \pi(y') = \bar{y}$. Dann ist $\pi(x - x') = \pi(x) - \pi(x') = 0$, dito $\pi(y - y') = 0$, und somit sind $u := x - x' \in U = \ker(\pi)$, $v := y - y' \in U = \ker(\pi)$, d.h. es sind $x = x' + u$, $y = y' + v$ mit $u, v \in U = \ker(\pi)$.
Also ist $xy = (x' + u)(y' + v) = x'y' + x'v + uy' + uv = x'y' + \underbrace{(ex'v + uy'e + euve)}_{\in U, \text{ da } U \text{ Ideal}}$,
wobei e das Einsel. von A ist.
Somit ist $xy = x'y' + w$ mit $w \in U = \ker(\pi)$, d.h. $\pi(xy) = \pi(x'y') + \pi(w) = \pi(x'y')$.
Durch (*) ist also eine Op. in A/U definiert. Prüfen wir die Axiome in 16.1:
A2): $(\bar{x}\bar{y}) \cdot \bar{z} = \pi(xy) \cdot \pi(z) = \pi((xy) \cdot z) = \pi(x(yz)) = \pi(x)\pi(yz) = \bar{x} \cdot (\bar{y}\bar{z})$.
A3): $(\bar{x} + \bar{y})\bar{z} = \pi((x+y)z) = \pi(xz + yz) = \pi(xz) + \pi(yz) = \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$,
analog die andere Formel.
A4): $\alpha(\bar{x}\bar{y}) = \alpha\pi(xy) = \pi(\alpha xy) = \pi((\alpha x)y) = (\overline{\alpha x})\bar{y} = \pi(x(\alpha y)) = \bar{x} \cdot (\overline{\alpha y})$.
A5): Sei $\bar{e} = \pi(e)$, dann ist $\bar{e} \cdot \bar{x} = \pi(ex) = \pi(x) = \bar{x} = \pi(x) = \pi(xe) = \bar{x}\bar{e}$,
also ist $\bar{e}$ das Einsel. von A/U.
Mit der durch (*) mittels π von A auf A/U übertragenen Mult. ist A/U somit eine Algebra und wegen (*) ist π ein A.-Hom. Dies zeigt i).
Zu ii): Es ex. VR-Hom. Ψ mit $\varphi = \Psi \circ \pi$, d.h. $\forall x \in A : \varphi(x) = (\Psi \circ \pi)(x) = \Psi(\pi(x)) = \Psi(\bar{x})$, wo $\bar{x} = \pi(x)$, dann ist insb. $\Psi(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \Psi(\pi(xy)) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \Psi(\bar{x})\Psi(\bar{y})$, $\Psi(\bar{e}) = \Psi(\pi(e)) = \varphi(e)$ Einsel. von A'. Also ist Ψ ein A.-Hom. □