ℓ17

\- 1 -

Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

ℓ17: Freie kommutative Algebren

<u>Stichworte:</u> Quotientenalgebra unter Berücksichtigung homogener Unterräume, kommutative Algebra, Konstruktion davon als Quotientenalgebra, Polynomalgebra, Bilder kommutativer Algebren sind kommutativ

---

Wir werden die Konstruktion einer Quotientenalgebra aus <u>16.18</u> mehrmals auf freie Algebren $A(B)$ anwenden. Für die Diskussion der erhaltenen Quotientenalgebra wird uns folgender Hilfs-Satz helfen, der die Zerlegung in homogene Unterräume benutzt:

17.1. <u>Satz:</u> Sei $A(B)$ eine freie Algebra, $U \subseteq A(B)$ ein Ideal, für das $U \subseteq \bigoplus_{n \geq m} A_n(B)$ mit einem $m \in \mathbb{N}$ gilt, ferner $\pi: A(B) \to A(B)/U$ der kanonische Epim. Dann ist π eingeschränkt auf $\bigoplus_{n<m} A_n(B)$ injektiv. Insbesondere enthält im Falle $m \geq 2$ die Quotientenalgebra ein isomorphes Bild von $K \oplus L(B) = A_0(B) \oplus A_1(B)$.

<u>Bew.:</u> <u>Gen. z. z.:</u> $\ker(\pi) \cap \bigoplus_{n<m} A_n(B) = \{0\}$. Dies gilt, da $\ker(\pi) = U \subseteq \bigoplus_{n \geq m} A_n(B)$ und $\left(\bigoplus_{n \geq m} A_n(B)\right) \cap \left(\bigoplus_{n<m} A_n(B)\right) = \{0\}$, da es sich um direkte Summanden handelt, d.h. es gilt ja $A = \underbrace{\left(\bigoplus_{n \geq m} A_n(B)\right)}_{\supseteq U} \oplus \left(\bigoplus_{n<m} A_n(B)\right)$. □

Jetzt können wir kommutative Algebren konstruieren:

17.2. <u>Def. (Kommutative Algebra):</u> i) Eine K-Algebra A heißt <u>kommutativ</u>, wenn ihre Mult. kommutativ ist, d.h. $\forall x, y \in A: xy = yx$.

ii) Sei B eine Menge und A eine <u>kommutative</u> Algebra. Dann heißt A <u>freie von B erzeugte kommutative Algebra</u>, wenn es eine Abb. $\eta: B \to A$ gibt mit: Zu jeder <u>kommutativen</u> Algebra A' und jeder Abb. $\lambda: B \to A'$ gibt es genau einen Hom. $\Psi: A \to A'$ mit $\lambda = \Psi \circ \eta$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\eta"'] & A' \\ A \arrow[ur, dashed, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

17.3. <u>Bsp.:</u> • K selbst, • die von einem El. erzeugte freie Algebra (d.h. die Polynome in 1 Unbestimmten),
• für $n \geq 2$ sind die Matrix-Algebren $K^{n \times n}$ <u>nicht</u> kommutativ.

17.4. <u>Satz</u> (<u>Eindeutigkeit</u>): Je zwei freie, von derselben Menge B erzeugte kommutative Algebren sind isomorph. <u>Bew.:</u> wörtlich wie der Bew. von <u>16.5.</u> $\square$

<u>Zur Konstruktion:</u> Seien A, A' Algebren, A' kommutativ und $\varphi: A \to A'$ ein A-Hom., so ist notwendig für alle $x, y \in A$: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(yx)$, d.h. $0 = \varphi(xy) - \varphi(yx) = \varphi(xy - yx)$, also $xy - yx \in \ker(\varphi)$. Damit ist also $\ker(\varphi)$ ein Ideal in A, das alle Elemente der Form $xy - yx$ enthält. Das kleinste Ideal U derart nutzen wir nun zur Konstruktion wie folgt.

17.5. <u>Satz</u> (<u>Existenz</u>): Sei B eine Menge, $A := A(B)$ die freie von B erzeugte Algebra, $U := U(S)$ das von $S := \{xy - yx;\ x, y \in A\}$ erzeugte Ideal. Dann ist $K[B] := A/U$ eine freie von B erzeugte Komm. Algebra. Für den kanonischen Epim. $\pi: A \to K[B]$ ist $\pi_{|B}$ injektiv.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, phantom, "\cap\!|"] & \\ U = U(S) \subseteq & A = A(B) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & A' \\ & K[B] = A/U \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Bew.:</u> z.z. ist die universelle Eigenschaft aus <u>17.2 ii)</u>. Haben folgende Situation: A ist frei über B. Somit ist $B \subseteq A$ und zu jedem $\lambda: B \to A'$ gibt es genau einen A-Hom. $\varphi: A \to A'$ mit $\varphi_{|B} = \lambda$. Die Algebra A' ist kommutativ, somit enthält $\ker(\varphi)$ alle El. der Form $xy - yx$, d.h. ganz S und somit auch $U = U(S)$. Also ex. genau ein $\psi: A/U \to A'$, so dass mit dem kanonischen Epim. $\pi: A \to A/U$ dann $\psi \circ \pi = \varphi$ gilt, d.h. $\psi \circ \pi_{|B} = \varphi_{|B} = \lambda$.
Die Algebra $K[B] = A/U$ ist selbst kommutativ, denn die Mult. in A/U ist def. durch $\pi(x) \cdot \pi(y) := \pi(xy)$, und wegen $xy - yx \in U = \ker(\pi)$ ist $\pi(xy) = \pi(yx)$, d.h. $\pi(x) \cdot \pi(y) = \pi(y) \cdot \pi(x)$. Damit ist $K[B]$ die gesuchte freie kommutative Algebra.
Das Ideal U wird erzeugt von $S = \{xy - yx;\ x, y \in A[B]\}$, und diese Elemente sind alle homogen vom Grad 2 in $A(B)$. Damit ist $U = U(S) \subseteq \bigoplus_{m \geq 2} A_m(B)$ und nach Satz <u>17.1</u> ist dann π eingeschränkt auf $A_0(B) \oplus A_1(B)$ injektiv. Wegen $B \subseteq A_1(B)$ ist also insb. $\pi_{|B}$ injektiv. $\square$

Zur Veranschaulichung untersuchen wir zwei typische Fälle für $K[B]$:

17.6. <u>Fall 1): B habe genau ein Element.</u> Sei $B=\{b\}$. Die freie Algebra $A(B)$ ist erzeugt von B^*, der Menge aller endlichen Folgen aus B. Jede solche Folge w hat die Form $w=\underbrace{bb\cdots b}_{n\text{-mal}}$, wofür wir kurz $w=b^n$ schreiben. Somit ist $B^*=\{b^n;\ n=0,1,\dots\}$ und $A(B)$ besteht aus allen El. der Form $x=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n b^n$, die $\alpha_n\in K$, die $\alpha_n\neq 0$ nur endlich oft. Diese Algebra ist trivialerweise selbst schon kommutativ. Damit ist für alle $x,y\in A(b)$ dann $xy-yx=0$, d.h. $S=\{0\}$ und $U(S)=\{0\}$. Wegen $U(S)=\ker(\pi)$ ist also π ein Isom. $A(b)\to K[b]$. Benennen wir noch $\pi(b)=:T$, so haben alle El. von $K[b]$ die Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n T^n$, die $\alpha_n\in K$ und $\alpha_n\neq 0$ nur endlich oft. D.h. $K[b]$ ist genau die Algebra der Polynome in einer Unbestimmten T. Dies ändert sich sobald $\# B\geq 2$:

$$\begin{array}{c}\{0\}=\ker(\pi)=U(S)\\ \cap\\ A(b)\\ \downarrow\pi\\ K(b)=A(b)/U(S)\end{array}$$

17.7. <u>Fall 2): $B=\{b,b'\}$ mit $b\neq b'$:</u> Dann besteht $A(b,b')$ aus allen endlichen LKen von endlichen Folgen aus b und b'. Diese Algebra ist nicht mehr kommutativ, da $bb'\neq b'b$. Beim Übergang $\pi: A(b,b')\to K[b,b']$ wird insb. $\pi(b)\pi(b')=\pi(bb')=\pi(b'b)=\pi(b')\pi(b)$, d.h. die Bilder $X:=\pi(b)$ und $Y:=\pi(b')$ von b,b' in $K[b,b']$ dürfen wir vertauschen. Ist also $w\in B^*$ eine Folge, die genau i-mal b und j-mal b' enthält, so ist $\pi(w)=(\pi(b))^i(\pi(b'))^j=X^iY^j$. Damit besteht $K[b,b']$ aus allen Elementen der Form $\sum_{i,j=0}^{\infty}\alpha_{ij}X^iY^j$ mit $\alpha_{ij}\in K$, die $\alpha_{ij}\neq 0$ nur endlich oft,

$$\begin{array}{c}A(b,b')\\ \downarrow\pi\\ K[b,b']=A(b,b')/U(S)\end{array}$$

d.h. den "Polynomen in 2 Variablen X und Y" über K.

Der homogene Unterraum $A_n(b,b')$ wird von allen Folgen der Länge n in B^* erzeugt. Die Bilder seiner Elemente in $K[b,b']$ haben somit die Gestalt $\sum_{i+j=n}\alpha_{ij}X^iY^j$, die $\alpha_{ij}\in K$,

was man üblicherweise als <u>homogene Polynome vom Grad n</u> bezeichnet.

17.8. <u>Bem.:</u> Für größere Mengen B erhält man entsprechend $K[B]$, die Polynomalgebra mit den Unbestimmten B.

Kommutative Algebren zeichnen sich durch die zusätzliche Eigenschaft aus, dass bei der Multiplikation die Reihenfolge der Faktoren unerheblich ist. Dies vererbt sich unter Homomorphismen:

17.9. **Satz:** Ist A eine kommutative Algebra, B eine beliebige Algebra, und $\varphi : A \to B$ ein A-Homomorphismus, so ist das Bild $\varphi(A) \subseteq B$ eine kommutative Unteralgebra von B.

Bew.: Für $b_1, b_2 \in \varphi(A)$ gibt es $a_1, a_2 \in A$ mit $b_i = \varphi(a_i)$, $i = 1,2$.
Dann ist $b_1 b_2 = \varphi(a_1)\varphi(a_2) = \varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_2 a_1) = \varphi(a_2)\varphi(a_1) = b_2 b_1$. $\square$

Somit sind insbesondere alle Quotienten von kommutativen Algebren selbst kommutativ. Hier ein weiteres Beispiel:

17.10. **Bsp.:** Sei $A = K[T]$, $A' = K^{n\times n}$, $b \in A'$ fest gewählt und $\varphi : A \to A'$, $p \mapsto p(b)$ der Einsetzhomomorphismus, vgl. 7.13.
Dann besteht $\varphi(A)$ aus allen Linearkombinationen von Potenzen der Matrix b, und dies ist eine kommutative Unteralgebra aller Matrizen.