

Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu

K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

L17: Freie Kommutative Algebren

Stichworte: Quotientenalgebra unter Berücksichtigung homogener Unterräume, kommutative Algebra, Konstruktion davon als Quotientenalgebra, Polynomalgebra, Bilder kommutativer Algebren sind kommutativ

Wir werden die Konstruktion einer Quotientenalgebra aus 16.18 mehrmals auf freie Algebren $A(B)$ anwenden. Für die Diskussion der erhaltenen Quotientenalgebra wird uns folgender Hilfs-Satz helfen, der die Zerlegung in homogene Unterräume benutzt:

17.1. Satz: Sei $A(B)$ eine freie Algebra, $U \subseteq A(B)$ ein Ideal, für das $U \subseteq \bigoplus_{m \geq m} A_m(B)$ mit einem $m \in \mathbb{N}$ gilt, ferner $\pi: A(B) \rightarrow A(B)/U$ der kanonische Epim. Dann ist π eingeschränkt auf $\bigoplus_{m \geq m} A_m(B)$ injektiv. Insbesondere enthält im Falle $m \geq 2$ die Quotientenalgebra ein isomorphes Bild von $K \oplus L(B) = A_0(B) \oplus A_1(B)$.

Bew.: Ben. 7.7: $\ker(\pi) \cap \bigoplus_{m \geq m} A_m(B) = \{0\}$. Dies gilt, da $\ker(\pi) = U \subseteq \bigoplus_{m \geq m} A_m(B)$ und $(\bigoplus_{m \geq m} A_m(B)) \cap (\bigoplus_{m < m} A_m(B)) = \{0\}$, da es sich um direkte Summanden handelt, d.h. es gilt ja $A = \underbrace{(\bigoplus_{m \geq m} A_m(B))}_{\cong U} \oplus (\bigoplus_{m < m} A_m(B))$. \square

Jetzt können wir kommutative Algebren konstruieren:

17.2. Daf. (Kommutative Algebra): i) Eine K -Algebra A heißt Kommutativ, wenn ihre MUL. kommutativ ist, d.h. $\forall x, y \in A: xy = yx$.

ii) Sei B eine Menge und A eine Kommutative Algebra. Dann heißt A freie von B erzeugte Kommutative Algebra, wenn es eine Abb. $\eta: B \rightarrow A$ gibt mit: Zu jeder Kommutativen Algebra A' und jeder Abb. $\lambda: B \rightarrow A'$ gibt es genau einen A -Hom. $\Psi: A \rightarrow A'$ mit $\lambda = \Psi \circ \eta$.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad \eta \quad} & A' \\ \downarrow & \swarrow \nearrow & \exists! \Psi \\ A' & \xlongequal{\quad \Psi \quad} & \end{array}$$

17.3. Bsp.: • K selbst, • die von einem El. erzeugte freie Algebra (d.h. die Polynome in 1 Unbestimmten), • für $m \geq 2$ sind die Matrix-Algebren $K^{m \times m}$ nicht kommutativ.

17.4. Satz (Eindeutigkeit): Sei zwei freie, von derselben Menge B erzeugte kommutative Algebren sind isomorph. Bew.: Wörtlich wie der Bew. von 16.5. \square

Ideale:
nutzte ↗
Quot.-
algebra

Zur Konstruktion: Seien A, A' Algebren, A' kommutativ und $\varphi: A \rightarrow A'$ ein A -Hom.,
 A/U so ist notwendig für alle $x, y \in A$: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(yx)$, d.h.
 $\begin{matrix} 2 \\ \text{so} \end{matrix}$ $0 = \varphi(xy) - \varphi(yx) = \varphi(xy - yx)$, also $xy - yx \in \ker(\varphi)$. Damit ist also $\ker(\varphi)$
 $U := \ker(\varphi)$ ein Ideal in A , das alle Elemente der Form $xy - yx$ enthält. Das kleinste
 $\begin{matrix} \forall \\ xy - yx \end{matrix}$ Ideal U daran nutzen wir nun zur Konstruktion wie folgt.

17.5. Satz (Existenz): Sei B eine Menge, $A := A(B)$ die freie von B erzeugte Algebra,
 $U := U(S)$ das von $S := \{xy - yx; x, y \in A\}$ erzeugte Ideal. Dann ist $K[B] := A/U$
 eine freie von B erzeugte komm. Algebra. Für den kanonischen Epim. $\pi: A \rightarrow K[B]$
 ist $\pi|_B$ injektiv.

Bew.: z.z. ist die universelle Eigenschaft aus 17.2 ii).

haben folgende Situation: A ist frei über B . Somit ist
 $B \subseteq A$ und zu jedem $\lambda: B \rightarrow A'$ gibt es genau

einen A -Hom. $\varphi: A \rightarrow A'$ mit $\varphi|_B = \lambda$. Die Algebra A' ist kommutativ, somit enthält $\ker(\varphi)$ alle El. der Form $xy - yx$, d.h. ganz S und somit auch $U = U(S)$. Also ex. genau ein $\varphi: A/U \rightarrow A'$, so dass mit dem kanonischen Epim. $\pi: A \rightarrow A/U$ dann $\varphi \circ \pi = \varphi$ gilt, d.h. $\varphi \circ \pi|_B = \varphi|_B = \lambda$.

Die Algebra $K[B] = A/U$ ist selbst kommutativ, denn die Mult. in A/U ist def. durch $\pi(x) \cdot \pi(y) := \pi(xy)$, und wegen $xy - yx \in U = \ker(\varphi)$ ist $\pi(xy) = \pi(yx)$, d.h. $\pi(x) \cdot \pi(y) = \pi(y) \cdot \pi(x)$. Damit ist $K[B]$ die gesuchte freie kommutative Algebra. $\in A_2(B)$

Das Ideal U wird erzeugt von $S = \{\overbrace{xy - yx}; x, y \in A(B)\}$, und diese Elemente sind alle homogen vom Grad 2 in $A(B)$. Damit ist $U = U(S) \subseteq \bigoplus_{n \geq 2} A_n(B)$ und nach Satz 17.1 ist dann π eingeschränkt auf $A_0(B) \oplus A_1(B)$ injektiv. Wegen $B \subseteq A_n(B)$ ist also insb. $\pi|_B$ injektiv. \square

$$\begin{array}{c} S \subseteq \bigcup_{\lambda \in \text{Hom}} B \\ \uparrow \quad \text{if } \lambda \\ U = U(S) \subseteq A = A(B) \xrightarrow{\varphi} A' \\ \uparrow \quad \text{if } \lambda \\ K[B] = A/U \xrightarrow{\pi} A' \end{array}$$

Zur Veranschaulichung untersuchen wir zwei typische Fälle für $K[B]$:

17.6. Fall 1): B habe genau ein Element. Sei $B = \{b\}$. Die freie Algebra $A(B)$ ist erzeugt von B^* , der Menge aller endlichen Folgen aus B . Jede solche Folge w hat die Form $w = b b \dots b$, wofür wir kurz $w = b^n$ schreiben. Somit ist $B^* = \{b^m; m \in \mathbb{N}_0\}$ und $A(B)$ besteht aus allen El. der Form $x = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m b^m$, die $\alpha_m \in K$, die $\alpha_m \neq 0$ nur endlich oft. Diese Algebra ist trivialerweise selbst schon kommutativ. Damit ist für alle $x, y \in A(B)$ dann $xy - yx = 0$, d.h. $S = \{0\}$ und $U(S) = \{0\}$. Wegen $U(S) = \text{Ker}(\pi)$ ist also π ein Isom. $A(B) \rightarrow K[b]$. Benennen wir noch $\pi(b) =: T$, so haben alle El. von $K[b]$ die Gestalt $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m T^m$, die $\alpha_m \in K$ und $\alpha_m \neq 0$ nur endlich oft. D.h. $K[b]$ ist genau die Algebra der Polynome in einer Unbestimmten T . Dies ändert sich sobald $\# B \geq 2$:

$$\begin{array}{c} \{0\} = \text{Ker}(\pi) = U(S) \\ \uparrow \pi \\ A(B) \\ \downarrow \pi \\ K[b] = A(B)/U(S) \end{array}$$

17.7. Fall 2): $B = \{b, b'\}$ mit $b \neq b'$: Dann besteht $A(b, b')$ aus allen endlichen Lk'en von endlichen Folgen aus b und b' . Diese Algebra ist nicht mehr kommutativ, da $bb' \neq b'b$. Beim Übergang $\pi: A(b, b') \rightarrow K[b, b']$ wird insb. $\pi(b)\pi(b') = \pi(bb') = \pi(b'b) = \pi(b')\pi(b)$, d.h. die Bilder $XY = YX$ von b, b' in $K[b, b']$ dürfen wir vertauschen.

$$\begin{array}{c} A(b, b') \\ \uparrow \pi \\ K[b, b'] = A(b, b')/U(S) \end{array}$$

Ist also $w \in B^*$ eine Folge, die genau i -mal b und j -mal b' enthält, so ist $w = \overbrace{bb \dots b}^i \overbrace{b' b' \dots b'}^j$. $\pi(w) = (\pi(b))^i (\pi(b'))^j = X^i Y^j$. Damit besteht $K[b, b']$ aus allen Elementen der Form $\sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} X^i Y^j$ mit $\alpha_{ij} \in K$, die $\alpha_{ij} \neq 0$ nur endlich oft,

d.h. den "Polynome in 2 Variablen X und Y " über K . $\hookrightarrow K[X, Y]$

Der homogene Unterraum $A_m(b, b')$ wird von allen Folgen der Länge m in B^* erzeugt. Die Bilder seiner Elemente in $K[b, b']$ haben somit die Gestalt

$$\sum_{i+j=m} \alpha_{ij} X^i Y^j, \quad \text{die } \alpha_{ij} \in K,$$

was man üblicherweise als homogen Polynome vom Grad m bezeichnet.

17.8. Bem.: Für größere Mengen B erhält man entsprechend $K[B]$, die Polynomialgebra mit den Unbestimmten B .

Kommulative Algebren zeichnen sich durch die zusätzliche Eigenschaft aus, dass bei der Multiplikation die Reihenfolge der Faktoren unerheblich ist. Dies vererbt sich unter Homomorphismen:

17.9. Satz: Ist A eine kommulative Algebra, B eine beliebige Algebra, und $\varphi: A \rightarrow B$ ein A -Homomorphismus, so ist das Bild $\varphi(A) \subseteq B$ eine kommulative Unterlagebra von B .

Bew.: Für $b_1, b_2 \in \varphi(A)$ gibt es $a_1, a_2 \in A$ mit $b_i = \varphi(a_i)$, $i=1,2$.

Dann ist $b_1 b_2 = \varphi(a_1) \varphi(a_2) = \varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_2 a_1) = \varphi(a_2) \varphi(a_1) = b_2 b_1$. \square

$A^{\text{Komm.}}$
 \downarrow
 $A/U_{\text{Komm.}}$

Somit sind insbesondere alle Quotienten von kommunitativen Algebren selbst kommunitativ. Hier ein weiteres Beispiel:

17.10. Bsp.: Sei $A = K[\tau]$, $A' = K^{n \times n}$, $b \in A'$ fest gewählt und $\varphi: A \rightarrow A'$, $p \mapsto p(b)$ der Einsetzhomomorphismus, vgl. 7.13.

Dann besteht $\varphi(A)$ aus allen Linearkombinationen von Potenzen der Matrix b , und dies ist eine kommulative Unterlagebra aller Matrizen.

$$B = \{\tau\} \leadsto A = A(B) = K[\tau]$$