Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

ℓ18: Tensoralgebren

Stichworte: Tensoralgebra, Tensorräume, n-lineare Abb., Tensor-Abb., universelle Eigenschaft der Tensorräume und des Tensorprodukts, Beispiel $K^{n\times m} \cong K^n \otimes K^m$

In diesem Kapitel ℓ18 schauen wir uns die freie Algebra $A(B)$ von einem anderen Standpunkt an. Wir hatten die Zerlegung von $A(B)$ als direkte Summe der homogenen Unterräume $A_n(B)$ in Satz 16.7, nämlich

$$A(B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n(B).$$

Darin war insbesondere $A_0(B) = K$, und $A_1(B) = L(B)$ ein K-VR mit Basis B.

18.1. **Bem.:** Man zeigt leicht, dass die Räume $A_n(B)$ genau aus allen (endlichen) Summen von Produkten von genau n Elementen aus $A_1(B)$ bestehen. ‖!

Damit ist also der von B erzeugte K-VR $V := A_1(B)$ in $A(B)$ enthalten und legt auch schon alle Räume $A_n(B)$, d.h. ganz $A(B)$, fest. Somit können wir statt von der Menge B auch von dem VR V ausgehend die freie Algebra gewinnen, d.h. ohne Rückgriff auf eine Basis B von V. Dieser Standpunkt wird durch folgenden Satz gerechtfertigt:

18.2 **Satz:** Es sei V ein (endl. dim.) VR, B und B' seien Basen von V, und $A(B)$ bzw. $A(B')$ seien die von B bzw. B' erzeugten freien Algebren.
Dann gelten: (i) Es gibt einen A.-Isomorphismus $\varphi: A(B) \to A(B')$.
(ii) Die Einschränkungen $\varphi_n := \varphi_{|A_n(B)}$ sind VR-Isomorphismen

$$\varphi_n : A_n(B) \xrightarrow{\cong} A_n(B').$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "\lambda"'] \arrow[d, hook] & B' \arrow[l, shift left, "\lambda^{-1}"'] \arrow[d, hook] \\ A(B) \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & A(B') \arrow[l, shift left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

Bew.: (i): Da B und B' Basen desselben Raumes sind, gibt es eine Bijektion $\lambda: B \to B'$. Die Abb.en $\eta: B \to A(B)$, $\eta': B' \to A(B')$ seien die Inklusionen. Da $A(B)$ bzw. $A(B')$ frei sind, haben wir Homomorphismen $\varphi: A(B) \to A(B'): \varphi \circ \eta = \eta' \circ \lambda$,

$$\psi: A(B') \to A(B): \psi \circ \eta' = \eta \circ \lambda^{-1}.$$

Somit gilt: $\psi\circ\varphi : A(B)\to A(B)$, $\psi\circ\varphi\circ\eta=\psi\circ\eta'\circ\lambda=\eta\circ\lambda^{-1}\circ\lambda=\eta$,
bzw. $\varphi\circ\psi : A(B')\to A(B')$, $\varphi\circ\psi\circ\eta'=\varphi\circ\eta\circ\lambda^{-1}=\eta'\circ\lambda\circ\lambda^{-1}=\eta'$.
Wie bei Satz 16.5 folgt, dass φ und ψ Isomorphismen sind.
(ii): $n=0$: Sind ε bzw. ε' die Einselemente von $A(B)$ bzw. $A(B')$, so ist $A_0(B)=\{\alpha\varepsilon\,;\,\alpha\in K\}$, $A_0(B')=\{\alpha\varepsilon'\,;\,\alpha\in K\}$
und notwendig $\varphi(\alpha\varepsilon)=\alpha\varphi(\varepsilon)=\alpha\varepsilon'$, d.h. φ_0 ist Isomorphismus.
$n=1$: Da φ insb. B auf B' abbildet und beides Basen von $A_1(B)=V=A_1(B')$ sind, ist φ_1 VR-Isomorphismus $\varphi_1 : A_1(B)\to A_1(B')$.
$n\geq 2$: Dies überträgt sich auf $n\geq 2$, da wie oben in 18.1 bemerkt, die $A_n(B)$ von den n-fachen Produkten von Elementen von $A_1(B)=V$ erzeugt werden. □

Das Wesentliche an der freien Algebra $A(B)$ ist also gar nicht die Menge B, sondern der von B erzeugte freie VR V, zu dem also B Basis ist, und der in $A(B)$ als homogener Raum $A_1(B)=V$ enthalten ist.
Diese Überlegung führt zu folgender Festsetzung:

18.3. **Def. und Satz (Tensoralgebra):** Sei V ein (endl. dim.) K-VR, B eine Basis von V, $A(B)$ die freie Algebra über B. Wir nennen
$T(V) := A(B)$ die Tensoralgebra über V.
Die homogenen Unterräume $T_n(V) := A_n(B)$ nennen wir Tensorräume.
Es ist $T_0(V)=K$ (der Grundkörper), $T_1(V)=V$,
und $T_n(V)=L(x_1\otimes\ldots\otimes x_n\,;\,x_1,\ldots,x_n\in V)$ für $n\geq 2$,
und $T(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n(V)$.
Die Tensoralgebra und ihre Tensor-Unterräume sind durch V bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

18.4. **Notation:** Statt $T_n(V)$ schreiben wir auch $\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{n\text{-mal}}$.

Diese Tensorräume besitzen nun eine universelle Eigenschaft im Zusammenhang mit multilinearen Abb.en (→ vgl. Determinanten: n-linear, Skalarprodukt: bilinear):

18.5. <u>Def. (n-linear)</u>: Es seien $V_1, \dots, V_n, W$ VRe über demselben Körper K. Eine Abb. $f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ heißt <u>n-linear</u>, wenn für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt: Fixiert man alle Argumente bis auf das i-te, so ist die entstehende Funktion $V_i \to W$ ein VR-Homom., d.h. $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + \alpha' x_i', x_{i+1}, \dots, x_n) = \alpha \cdot f(\dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots) + \alpha' \cdot f(\dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots)$.
Ist speziell $V_1 = V_2 = \dots = V_n = V$, so spricht man von <u>n-linearen Abbildungen von V nach W</u>.

18.6. <u>Bem.</u>: • 1-lineare Abb.en sind die gewöhnlichen VR-Homomorphismen.
• Zu jedem VR V ist offenbar die Abb. $\otimes: V \times V \times \dots \times V \to T_n(V)$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ eine n-lineare Abb., da für die Multiplikation $\otimes$ in $T(V)$ ja das Distributivgesetz gilt und skalare Faktoren durchgezogen werden dürfen (Axiome A2, A3, A4 in Def. 16.1).

Als Vorbereitung für weitere Überlegungen zeigen wir jetzt die Verallgemeinerung von Bem. L13.5, LA I, (=lineare Abb.en sind durch die Werte auf einer Basis eindeutig festgelegt) für n-lineare Abben:

18.7. <u>Satz</u>: Seien $V_1, \dots, V_n$ VRe mit Basen $B_i = (b_1^{(i)}, \dots, b_{m_i}^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$, W ein VR und $\lambda: B_1 \times \dots \times B_n \to W$ eine Abb. Dann gibt es genau eine n-lineare Abb. $f: V_1 \times \dots \times V_n \to W$ mit $f|_{B_1 \times \dots \times B_n} = \lambda$.

<u>Bew.</u>: <u>$n = 2$</u>: Nennen die beiden Basen $B = (b_1, \dots, b_m)$ und $C = (c_1, \dots, c_k)$.
Ist $f: V_1 \times V_2 \to W$ 2-linear mit $f|_{B \times C} = \lambda$, so ist mit $x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i$, $x_2 = \sum_{j=1}^k \beta_j c_j$ dann: $f(x_1, x_2) = f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^k \beta_j c_j\right) = \sum_i \alpha_i f\left(b_i, \sum_j \beta_j c_j\right) = \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j \underbrace{f(b_i, c_j)}_{= \lambda(b_i, c_j)}$.

Somit bestimmen die $\lambda(b_i, c_j)$ schon die Werte von f, d.h. es gibt höchstens eine bilineare Abb. mit diesen Werten. Andererseits definiert obige Formel auch eine bilineare Abb., womit alles gezeigt ist.
<u>$n > 2$</u>: induktiv, führen Sie die Einzelheiten aus (Ü). □

18.8. <u>Satz</u> (<u>universelle Eigenschaft der Tensorräume</u>): Seien V, W K-VRe, und sei $f: V\times\dots\times V \to W$ n-linear. Dann gibt es genau einen Homom. $\varphi: T_n(V)\to W$, so dass für alle $x_i\in V$: $f(x_1,\dots,x_n)=\varphi(x_1\otimes\dots\otimes x_n)$, d.h. $f=\varphi\circ\otimes$.

$$\begin{tikzcd} V\times\dots\times V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & W \\ T_n(V) \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Bew.</u>: Sei B Basis von V. Dann ist $\{b_1\otimes\dots\otimes b_n;\ b_i\in B\}$ Basis von $T_n(V)$. Somit ex. genau ein Homom. $\varphi: T_n(V)\to W$ mit $\varphi(b_1\otimes\dots\otimes b_n)=f(b_1,\dots,b_n)$ für alle $(b_1,\dots,b_n)\in B\times\dots\times B$.
Die Abbildung $\otimes: V\times\dots\times V\to T_n(V)$, $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1\otimes\dots\otimes x_n$ ist n-linear, somit auch $\varphi\circ\otimes: (x_1,\dots,x_n)\mapsto\varphi(x_1\otimes\dots\otimes x_n)$, und diese stimmt auf $B_1\times\dots\times B_n$ mit f überein. Nach Satz 18.7 ist sie identisch mit f. □

18.9. <u>Fazit</u>: Jede n-lineare Abb. $V\times\dots\times V\to W$ lässt sich also in folgende 2 Schritte zerlegen: (i) Führe die "universelle" n-lineare Abb. $\otimes: V\otimes\dots\otimes V\longrightarrow T_n(V)$ in den Tensorraum aus und, (ii) eine (im gewöhnlichen Sinne) lineare Abb. $\varphi: T_n(V)\to W$.

18.10. <u>Bem.</u>: Wir hatten n-lineare Abbildungen von einem Produkt i.a. <u>verschiedener Räume</u> (her-) ausgehend definiert. Dies fügt sich hier ein: Seien $V_1,\dots,V_n$ beliebige (K-)VRe. Wir bilden einen VR V, zu dem alle Räume V_i Unterräume sind. Etwa die direkte Summe $V=\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ ist ein solches V.
Wir bilden den Tensorraum $T_n(V)$ und betrachten darin den Unterraum $\underline{V_1\otimes\dots\otimes V_n} := L(\{x_1\otimes\dots\otimes x_n;\ x_i\in V_i,\ i=1,\dots,n\})\subseteq T_n(V)$.

18.11. <u>Def.</u>: Dieser Raum $V_1\otimes\dots\otimes V_n$ heißt <u>Tensorprodukt</u> der Räume $V_1,\dots,V_n$.
Die Rechtfertigung für diese Definition liegt in folgendem Satz:

18.12. <u>Satz</u> (<u>universelle Eigenschaft des Tensorprodukts</u>): (i) Zu jeder n-linearen Abb. $f: V_1\times\dots\times V_n\longrightarrow W$ gibt es genau einen VR-Hom. $\varphi: V_1\otimes\dots\otimes V_n\to W$ mit

$$\begin{tikzcd} V_1\times\dots\times V_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & W \\ V_1\otimes\dots\otimes V_n \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi(x_1\otimes\dots\otimes x_n)=f(x_1,\dots,x_n)$ für alle $x_i\in V_i$, $i=1,\dots,n$.

(ii) Das Tensorprodukt ist durch die univ. Eig. (i) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(iii) Für jede Permutation π der Indizes $1,\dots,n$ sind $V_1\otimes\dots\otimes V_n$ und $V_{\pi(1)}\otimes\dots\otimes V_{\pi(n)}$ isomorphe VRe.

18.13 **Bew.:** (i): • Existenz von φ: Wir wählen einen Raum V mit $V_i \subseteq V$ für alle i, dann gibt es zu jedem V_i einen komplementären Raum U_i in V, d.h. mit $V = U_i \oplus V_i$. Jedes $x \in V$ hat dann eine eindeutige Darstellung als $x = u_i + v_i$ mit $u_i \in U_i$, $v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n$. Wir erweitern die n-lineare Abb. $f : V_1 \times \dots \times V_n \to W$ zu einer n-linearen Abbildung

$$g : V \times \dots \times V \to W \text{ durch die Festsetzung}$$
$$g(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) := f(v_1, \dots, v_n).$$

Dass dies n-linear ist, demonstrieren wir für das 1-te Argument. Sei dazu $x = u_1 + v_1$, $x' = u_1' + v_1'$. Dann ist

$$\alpha x + \alpha' x' = \alpha(u_1 + v_1) + \alpha'(u_1' + v_1') = \underbrace{(\alpha u_1 + \alpha' u_1')}_{\in U_1} + \underbrace{(\alpha v_1 + \alpha' v_1')}_{\in V_1}$$

die Zerlegung von $\alpha x + \alpha' x'$ entsprechend $U_1 \oplus V_1$. Dann ist

$$g(\alpha x + \alpha' x', u_2 + v_2, \dots) = g((\alpha u_1 + \alpha' u_1') + (\alpha v_1 + \alpha' v_1'), u_2 + v_2, \dots)$$
$$= f(\alpha v_1 + \alpha' v_1', v_2, \dots) = \alpha f(v_1, v_2, \dots) + \alpha' f(v_1', v_2, \dots)$$
$$= \alpha g(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots) + \alpha' g(u_1' + v_1', u_2 + v_2, \dots)$$
$$= \alpha g(x, u_2 + v_2, \dots) + \alpha' g(x', \dots).$$

Nach Satz 18.8 gibt es zu g genau einen Homom. $\Psi : T_n(V) \to W$, so dass für alle $x_i \in V$ gilt: $g(x_1, \dots, x_n) = \Psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$.
Ist speziell für alle i nun $x_i \in V_i$, d.h. $u_i = 0$, so ist $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, d.h. $\Psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ für alle $x_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n$.
Die Einschränkung von Ψ auf den Unterraum $V_1 \otimes \dots \otimes V_n \subseteq T_n(V)$ ist der gesuchte Homomorphismus φ.

• Eindeutigkeit von φ: Durch $\varphi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ ist φ auf einem Erzeugendensystem von $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ festgelegt. Somit kann es nur einen solchen Homomorphismus geben.

(ii): Diese Aussage ist so zu lesen: Zum Tensorprodukt $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ gehört die natürliche n-lineare Abb. $\eta : V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n$: $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n$.

<u>Somit ist diese Beh. zu zeigen:</u> Ist P ein VR, $\eta': V_1 \times \ldots \times V_m \to P$ eine m-lineare Abb. mit der Eigenschaft

$$(*) \begin{cases} \text{Für jeden VR } W \text{ und jede } m\text{-lineare Abb. } f: V_1 \times \ldots \times V_m \to W \\ \text{gibt es genau einen Homom. } \psi: P \to W \text{ mit } f = \psi \circ \eta', \end{cases}$$

dann sind P und $V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$ isomorph.

Dies geht wieder nach der Methode des "general abstract nonsense":
η' ist m-linear, somit gibt es einen Homom. $\varphi: V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \to P$ mit $\eta' = \varphi \circ \eta$.

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \ldots \times V_m \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] \arrow[d, phantom, "///"] & \\ V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \arrow[rr, dashed, shift right, "\varphi"'] & & P \arrow[ll, dashed, shift right, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Dann sind $\psi \circ \varphi: V_1 \otimes \ldots \otimes V_m \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_m$ und $\varphi \circ \psi: P \to P$ Homom., und es gilt $\psi \circ \varphi \circ \eta = \psi \circ \eta' = \eta$ bzw. $\varphi \circ \psi \circ \eta' = \varphi \circ \eta = \eta'$.
Wie früher in 16.5 folgt daraus, dass $\psi \circ \varphi = id_{V_1 \otimes \ldots \otimes V_m}$ und $\varphi \circ \psi = id_P$.
Also sind φ und ψ Isomorphismen und obige Beh. ist gezeigt.

18.14. <u>Bem.:</u> Dieser Beweis zeigt insb., dass der als gemeinsame Oberraum der V_i gewählte Raum V für das Tensorprodukt völlig belanglos ist!

18.15. <u>Bew. von (iii):</u> Wir zeigen dies exemplarisch für zwei Räume V_1, V_2, dazu benutzen wir Teil (ii) mit $P := V_2 \otimes V_1$,
$\eta': V_1 \times V_2 \to P, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_2 \otimes v_1$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta'"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & W \\ P = V_2 \otimes V_1 \arrow[ur, dashed, "\exists!\psi\text{, setzt } g \text{ fort}"'] & \end{tikzcd}$$

Wir bilden die Abb. $g: V_2 \times V_1 \to W$, $g(v_2, v_1) := f(v_1, v_2)$.
Trivialerweise ist mit f auch g bilinear.
Somit gibt es genau einen Homom. $\psi: P = V_2 \otimes V_1 \to W$ mit $\psi(v_2 \otimes v_1) = g(v_2, v_1)$. Dann ist aber auch für alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$:

$$(\psi \circ \eta')(v_1, v_2) = \psi(\eta'(v_1, v_2)) = \psi(v_2 \otimes v_1) = g(v_2, v_1) = f(v_1, v_2),$$

d.h. $\psi \circ \eta' = f$. Damit ist ein ψ mit Eigenschaft $(*)$ gefunden.
Da die Werte von ψ auf einem Erzeugendensystem von P festliegen, kann es nur eines geben. Daher hat (P, η') dieselbe univ. Eig. wie $V_2 \otimes V_1$, mit (ii) folgt die Beh. $\square$

Wir besprechen zuletzt noch ein wichtiges Beispiel für ein Tensorprodukt.

18.16. Bsp.: Für jede $n\times n$-Matrix $A=(\alpha_{ij})$ ist $x^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\,\xi_i\,\eta_j = \langle x, Ay\rangle$ eine bilineare Abb. $K^n\times K^n \to K$, lässt sich also als lineare Abb. $K^n \otimes K^n \to K$ beschreiben.

Dafür kann man etwa so vorgehen:

Sei $T := K^{n\times n}$ der K-VR der $n\times n$-Matrizen,

$\otimes: K^n \times K^n \to T$ definiert durch

$$(x, y) \mapsto x\, y^T$$

Spalte, Zeile, d.h. $n\times 1$-Matrix mal $1\times n$-Matrix gibt $n\times n$-Matrix

$$\begin{tikzcd} K^n\times K^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & K \\ T=K^{n\times n} \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Dann ist diese Abb. $\otimes$ bilinear, und $T, \otimes$ ist ein Tensorprodukt.

[Denn "$\otimes$" bildet eine Basis auf eine Basis ab, daher $\exists \otimes^{-1}$, also $\varphi := f\circ\otimes^{-1}$. Weiter zeigt man für T die universelle Eigenschaft des Tensorprodukt, also ist T ein Tensorprod.]

Dann ist $x\otimes y = x y^T$ die Matrix mit den Elementen $(\xi_i \eta_j)$, und somit ist $x^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\,\xi_i\,\eta_j$ ein lineares Funktional auf T, betrachtet im Punkt $x\otimes y$. (D.h. eine lineare Abbildung von T nach K.)

Gleichzeitig sieht man hier, dass T, d.h. $K^n\otimes K^n$, weit mehr Elemente als die von der Gestalt $x\otimes y$ enthält.

Dazu kann man etwa folgendes zeigen:

1.) Der Rang der Matrix $x\otimes y$ ist ≤ 1 und $=1$ genau wenn $x\neq 0$, $y \neq 0$.

2.) Der Rang von $\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$ ist $\le r$.

3.) Hat eine Matrix C den Rang r, so gibt es eine Darstellung $C = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$.

Ü Versuchen Sie nach diesem Muster Darstellungen für andere, Ihnen bekannten bilinearen Abbildungen (z.B. $\underset{\text{Algebra}}{A\times A \to A}$, $(a,b)\mapsto a\cdot b$) über die zugehörigen Tensorräume zu finden.