Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

L19: Äußere Algebren

Stichworte: Alternierende Abbildung, Äußere Algebra $E(V)$, Multiplikation $\wedge$, universelle Eigenschaft der äußeren Algebra, Struktur der $E_m(V)$, Verschwinden von $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$

Als weiteres Beispiel einer Quotientenalgebra gewinnen wir in diesem Kapitel die äußeren Algebren. Deren Theorie steht in engem Zusammenhang mit Determinantentheorie. Determinantenfunktionen hatten wir in LA I, L18, als bestimmte n-lineare Abb.en untersucht. Nun wissen wir, dass n-lineare Abb.en mit der schon konstruierten freien Algebra $A(B)$ und Tensorprodukten zu tun haben. Diese Verbindungen sollen jetzt genauer untersucht werden.
Wir benötigen wieder den Begriff einer alternierenden Abb., vgl. LA I, L18.2, (D2).

19.1. Def. (alternierend): Es seien V, W K-VRe, $f: V \times \ldots \times V \to W$ n-linear.
Dann heißt f alternierend, wenn $f(x_1, \ldots x_n) = 0$ sofern $x_i = x_j$ für zwei verschiedene Indizes $i \neq j$ ist.

(Also: $\forall x_1, \ldots, x_n \in V: (\exists i, j,\ i \neq j: x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0$).

Eine Erinnerung an LA I, L18.4 ist folgendes:

19.2. Satz: Es sei $f: V \times \ldots \times V \to W$ n-linear und alternierend. Dann gelten:
(i) $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ wenn $(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig.
(ii) Addiert man zu einem Argument eine Linearkombination der übrigen, so ändert f seinen Wert nicht.
(iii) Vertauscht man zwei Argumente, so ändert f das Vorzeichen.

19.3. Bem.: Nun haben wir n-lineare Abb.en zusammen mit der Tensoralgebra studiert. Die zusätzliche Forderung des Alternierens bringt weitere Eigenschaften, die wir direkt aus den Tensorräumen ableiten können.
Wir knüpfen dabei aber wieder an die Konstruktion der Quotientenalgebra an.

19.4. Voraussetzung/Ausgangssituation: Sei V ein endl. dim. K-VR, sei $T(V)$ die zugehörige Tensoralgebra (das ist die bis auf Isomorphie die von einer beliebigen Basis B von V erzeugte freie Algebra $A(B)$).

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\subseteq"'] & A' \\ T(V) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Wir nehmen an, A' sei eine beliebige Algebra, $\lambda: V \to A'$ sei ein VR-Homom., so dass für alle $x \in V$: $\boxed{\lambda(x)\lambda(x) = 0}$ gelte, und es gebe einen A-Hom. $\varphi: T(V) \to A'$, der λ fortsetzt.

Dann ist notwendig für alle $x \in V$: $\varphi(x \otimes x) = \varphi(x)\varphi(x) = \lambda(x)\lambda(x) = 0$,

d.h. $x \otimes x \in \ker \varphi$.

Wenn es also einen solchen Homom. φ gibt, muss sein Kern alle Elemente der Form $x \otimes x$ für $x \in V$ enthalten. Dies ist eine ähnliche Situation wie bei der Konstruktion 17.5 der freien kommutativen Algebra. Gehen wir analog vor.

19.5 Def. (Äußere Algebra): Es sei V ein endl. dim. K-VR und $T(V)$ die Tensoralgebra über V und $U := U(S)$ das von $S := \{x \otimes x;\ x \in V\}$ in $T(V)$ erzeugte Ideal.

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \\ E(V)=T(V)/U \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\psi"'] & \end{tikzcd}$$
vgl. 19.7

Dann heißt $E(V) := T(V)/U$ die äußere Algebra über V.

Der kanonische Epimorphismus $T(V) \to E(V)$ sei wieder mit π bezeichnet, sein Kern ist U. Die Bilder der homogenen Räume $T_n(V)$ unter π seien mit $E_n(V)$ bezeichnet, d.h. $E_n(V) := \pi(T_n(V))$,
und die Multiplikation in $E(V)$ mit dem Symbol $\wedge$. "Dach"
(Schreiben also $\pi(x \otimes y) =: \pi(x) \wedge \pi(y)$.)

19.6. Bem.: Nach Satz 17.1 ist $E_1(V)$ isomorph zu $T_1(V) = V$.
Somit können wir für $x \in V$ die Vektoren x und $\pi(x)$ identifizieren, d.h. annehmen, dass $V = E_1(V)$ und damit auch $B \subseteq E(V)$ ist.

Wir gelangen zu folgender universeller Eigenschaft:

19.7. **Satz (universelle Eigenschaft der äußeren Algebra):**
Die äußere Algebra $E(V)$ besitzt folgende universelle Eigenschaft, die sie auch bis auf Isomorphie charakterisiert:
Ist A' eine beliebige Algebra und $\lambda: V \to A'$ ein VR-Homom. so, dass für alle $x \in V$ gilt $\lambda(x)\lambda(x) = 0$, so gibt es genau einen A.-Homom. $\Psi: E(V) \to A'$ mit $\Psi|_V = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & A' \\ U \subseteq T(V) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & \\ E(V) = T(V)/U \arrow[uur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

Bew.: • $E(V)$ besitzt diese Eigenschaft: $T(V)$ ist die freie Algebra. Also kann man die Werte von λ auf einer beliebigen Basis von V auf genau eine Weise zu einem A.-Homom. $\varphi: T(V) \to A'$ fortsetzen. Dieses φ setzt dann den ganzen Homom. λ fort.
Nach den Vorüberlegungen muss dann das von $S = \{x \otimes x;\ x \in V\}$ erzeugte Ideal ganz in $\ker \varphi$ enthalten sein. Somit gibt es genau einen A-Homom. $\Psi: E(V) \to A'$ mit $\varphi = \Psi \circ \pi$. Mit Bem. 19.6 ist dann $\lambda = \Psi \circ \pi|_V = \Psi|_V$.
Die Charakterisierung bis auf Isomorphie ist die wörtliche Wdh. des schon mehrfach verwendeten Schlusses, der in 16.5 ausgeführt wurde. □

19.8. **Bem.:** Diese äußere Algebra $E(V)$ hat für die alternierenden n-linearen Abb.en dieselbe Bedeutung wie die Tensoralgebra $T(V)$ für alle n-linearen.
$E(V)$ enthält die Räume

$$E_n(V) = \pi\big(L(\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n;\ x_i \in V\})\big) = L(\{\pi(x_1) \wedge \ldots \wedge \pi(x_n);\ x_i \in V\}),$$

und da V ja selbst in $E(V)$ enthalten ist, haben wir also

$$E_n(V) = \pi(T_n(V)) = \pi\big(L(\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n;\ x_i \in V\})\big)$$
$$= L(\{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n;\ x_i \in V\}).$$

19.9. **Satz:** Es seien V, W endl.dim. K-VRe, $f: V \times \ldots \times V \to W$ n-linear und alternierend. Dann gibt es genau einen Homom. $\varphi: E_n(V) \to W$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$ für alle $x_i \in V$.

$$\begin{tikzcd} V \times \ldots \times V \arrow[r, "\pi \circ \otimes"] \arrow[d, "f"'] & E_n(V) \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

19.10. **Bem.:** Die Räume $E_n(V)$ sind hierdurch bis auf Isomorphie charakterisiert.

__Bew. von 19.9:__ f ist m-linear. Damit gibt es nach Satz 18.12 genau einen Homom. $\Psi : T_m(V) \to W$ mit $f(x_1, \dots, x_m) = \Psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_m)$. Wenn wir nun zeigen, dass $\ker(\pi) \cap T_m(V) \subseteq \ker(\Psi)$, dann gibt es genau einen Homom. $\varphi : E(V) \to W$ mit $\varphi \circ \pi = \Psi$, und wir sind fertig. Dies zeigt man folgendermaßen:

$$\begin{tikzcd}
V \times \dots \times V \arrow[d, "\otimes"] \arrow[drr, "f"] & & \\
T_m(V) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[d, "\pi"] & & W \\
E_m(V) \arrow[urr, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Es ist $\ker \pi = U$, das von allen $x \otimes x$ mit $x \in V$ erzeugte Ideal. Somit besteht $U \cap T_m(V)$ aus allen Linearkombinationen von Elementen der Form $x_1 \otimes \dots \otimes x_m$, wo zwei benachbarte Faktoren gleich sind. Für solche Elemente ist aber $\Psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) = f(x_1, \dots, x_m) = 0$, da f alternierend ist. Also ist $U \cap T_m(V) \subseteq \ker \Psi$, was noch zu zeigen war. $\square$

Nun wollen wir noch die Struktur dieser äußeren Algebra, bzw. der Räume $E_m(V)$, noch genauer klären.

19.11. __Vor.:__ Geg. sei eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V und einen von m Basiselementen erzeugten Unterraum $V_m := L(b_1, \dots, b_m)$. Dann hat jedes $x \in V_m$ eine eindeutige Darstellung als $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i$, und die Abb. $\lambda : V_m \to K^m$, $x \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ ist der bekannte von der Basis $\mathcal{B}$ vermittelte Isomorphismus.

19.12. __Def.:__ Wir betrachten die Abb.

$$\delta : V_m \times \dots \times V_m \mapsto K,$$
$$\delta(x_1, \dots, x_m) := \det(\lambda(x_1) | \dots | \lambda(x_m)) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix},$$

wo die Koordinaten von x_j in der j-ten Spalte stehen.

19.13. __Bem.:__ Nach den Determinanten-Regeln folgt: $\delta : V_m \times \dots \times V_m \to K$ ist m-linear, alternierend und $\delta(b_1, \dots, b_m) = 1$.

(Vgl. Beweis von Satz L18.8 in LA I.)

Die Abb. δ können wir (wie bei Satz 18.12) auf ganz V ausdehnen:

19.14. **Def.:** Sei $W_n := L(\{b_{n+1}, \dots, b_m\})$, dann ist $V = V_n \oplus W_n$, und jedes x hat eine eindeutige Darstellung als $x = v + w$ mit $v \in V_n$, $w \in W_n$. Die Zuordnung $p: V \to V_n$, $x \mapsto p(x) := v$ ist dann linear mit Kern W_n.

Dann def. die Abb. $\Delta : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n\text{-mal}} \to K$,
$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \delta(p(x_1), \dots, p(x_n)).$$

19.15. **Bem.:**
- Auch die Abb. Δ ist n-linear und alternierend. Ferner ist $\Delta(b_1, \dots, b_n) = 1$ und $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$ falls ein $x_j \in W_n$, insbesondere wenn es ein Element der Basis $(b_{n+1}, \dots, b_m)$ von W ist.
- Beginnt man statt mit $b_1, \dots, b_n$ mit irgendwelchen Basis-Elementen $b_{i_1}, \dots, b_{i_n}$ mit $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le m$, so können wir den Prozess analog gestalten.

Wir erhalten:

19.16. **Satz:** Sei V ein K-VR mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ und $1 \le i_1 < \dots < i_n \le m$. Dann gibt es eine n-lineare, alternierende Abb. $\Delta_{i_1 \dots i_n} : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n\text{-mal}} \to K$, für die $\Delta_{i_1 \dots i_n}(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) = 1$ und
$$\Delta_{i_1 \dots i_n}(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) = 0 \text{ sofern wenigstens ein } j_k \notin \{i_1, \dots, i_n\}.$$

19.17. Zusammenfassung der Konstruktion: Zum Berechnen von $\Delta_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n)$ gehe man so vor:
1. Stelle die x_j durch die Basis $b_1, \dots, b_m$ dar und schreibe die Koeffizienten als Spalten in eine $m \times n$-Matrix X.
2. Streiche daraus alle Zeilen mit Nummern $j \notin \{i_1, \dots, i_n\}$. Die Determinante der entsprechenden $n \times n$-Matrix ist der gesuchte Wert für Δ.

Nun verwenden wir Satz 19.9:
Jede solche Funktion $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ besitzt eine Darstellung als

(*) $\Delta_{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{i_1 \dots i_n}(x_1 \wedge \dots \wedge x_n)$, wobei $\varphi_{i_1 \dots i_n} : E_n(V) \to K$ eine lineare Abb. nach K, d.h. ein Funktional auf $E_n(V)$ ist. Damit gilt nun:

11.18. __Satz (Struktur der $E_n(V)$)__: Sei V ein m-dimensionaler K-VR, $\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_m)$ eine Basis von V. Dann gelten:

(i) Die Abb. $\underbrace{V\times\dots\times V}_{n\text{-mal}} \to E_n(V)$, $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1\wedge\dots\wedge x_n$ ist n-linear und alternierend.

(ii) $E_n(V)=\{0\}$ für $n>m$.

(iii) $\dim E_n(V)=\binom{m}{n}$ und $(b_{i_1}\wedge b_{i_2}\wedge\dots\wedge b_{i_n};\ 1\le i_1<\dots<i_n\le m)$ ist Basis von $E_n(V)$.

(iv) Mit den in ⊗ konstruierten Funktionalen $\varphi_{i_1\dots i_n}$ auf $E_n(V)$ ist
$$x_1\wedge\dots\wedge x_n=\sum_{1\le i_1<\dots<i_n\le m}\varphi_{i_1\dots i_n}(x_1\wedge\dots\wedge x_n)\, b_{i_1}\wedge\dots\wedge b_{i_n}.$$

(v) Die Räume $E_n(V)$ und $E_{m-n}(V)$ sind isomorph.
Insbesondere ist $E_m(V)=K$, $E_{m-1}(V)=V$.

(vi) Es sind $x_1,\dots,x_n\in V$ linear abhängig, genau wenn $x_1\wedge\dots\wedge x_n=0\in E_n(V)$.

__Bew.:__ (i): Für $x\in V$ ist $x\otimes x\in U=\ker\pi$, wo $\pi: T(V)\to E(V)=T(V)/U$.
Also ist $0=\pi(x\otimes x)=x\wedge x$.
Dann ist auch $0=(x+y)\wedge(x+y)=x\wedge x+x\wedge y+y\wedge x+y\wedge y=x\wedge y+y\wedge x$, d.h. $x\wedge y=-y\wedge x$. Vertauschen von 2 Elementen ändert also nur das Vorzeichen. Sind in $x_1\wedge\dots\wedge x_n$ zwei Elemente gleich, so können wir solange vertauschen (wobei sich nur das Vorzeichen ändert), bis die beiden nebeneinander stehen. Dann ist aber deren $\wedge$-Produkt $=0$, also auch das ganze. Somit ist unsere Abb. alternierend und n-linear sowieso.

(ii): Es ist $E_n(V)=\pi(T_n(V))=\pi(L(b_{i_1}\otimes\dots\otimes b_{i_n};\ 1\le i_1,\dots,i_n\le m)$
$$=L(\{b_{i_1}\wedge\dots\wedge b_{i_n};\ 1\le i_1<\dots<i_n\le m\}).$$
Vertauschen wir in einem solchen Term die Reihenfolge der Faktoren, so ändert sich höchstens das Vorzeichen. Damit sind alle Elemente $b_{j_1}\wedge\dots\wedge b_{j_n}$ mit $\{j_1,\dots,j_n\}=\{i_1,\dots,i_n\}$ Vielfache von $b_{i_1}\wedge\dots\wedge b_{i_n}$. Somit ist $E_n(V)=L(\{b_{i_1}\wedge\dots\wedge b_{i_n};\ 1\le i_1<\dots<i_n\le m\})$, da gleiche Indizes sowieso das Nullelement liefern. Damit ist $\dim E_n(V)\le\binom{m}{n}$, und insbesondere $\dim E_n(V)=0$ für $n>m$.

(iii): Wir haben zu zeigen, dass die $(b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n} ; 1 \le i_1 < \ldots < i_n \le m)$ eine unabhängige Familie sind: Dazu verwenden wir die oben in ⊛ konstruierten Funktionale $\varphi_{i_1 \ldots i_n}$. Mit ⊛ und Satz 19.16 ist für alle der Größe nach geordneten Indextupel

$$\varphi_{i_1 \ldots i_n}(b_{j_1} \wedge \ldots \wedge b_{j_n}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_n = j_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit bilden diese Funktionale zusammen mit diesen Elementen ein Biorthogonalsystem, sind also beides unabhängige Systeme, vgl. LA I, L24.3.

(iv): Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von Biorthogonalsystemen! Ü

(v): Dies folgt wegen $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ unmittelbar aus (iii).

(vi): Nach (i) ist $\wedge : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ eine n-lineare alternierende Abb. Somit ist nach Satz 19.2 $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$ wenn die x_i abhängig sind. Sind $x_1, \ldots, x_n$ unabhängig, können wir zu einer Basis von V ergänzen: $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m$. Dann ist $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge (x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m)$
$= \varphi_{1, \ldots, m}(x_1, \ldots, x_m) \cdot b_1 \wedge \ldots \wedge b_m$ (nach (iv) für $n = m$).
Nun ist $\varphi_{1, \ldots, m}(x_1, \ldots, x_m)$ aber gerade die über Satz 19.16 gewonnene Determinante der unabhängigen $x_1, \ldots, x_m$, also $\neq 0$.
Damit muss auch $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0$ sein. □