Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§1: Bilinearformen

l1: Einleitung und Wiederholung:
Normale Endomorphismen und Hauptachsentransformationen

Stichworte: Einleitung und Übersicht zur LA II, Wiederholung aus LA I: Grundbegriffe zu Bilinearformen und Skalarprodukten, normale Endos und ihre H.A.trafos

---

Einleitung zur Linearen Algebra II:

In dieser Veranstaltung setzen wir die lineare Algebra I fort. Die Themen der Linearen Algebra I werden ergänzt und vertieft. Weiterführende Fragen, die dabei aufgetaucht sind, sollen beantwortet werden. Die Terminologie und Notationen sind im wesentlichen die des ersten Teils der Linearen Algebra; also z.B., weil wir Matrizen von links an Vektoren heranmultiplizieren, ist unumgänglich, einen Vektor des K^n als Spaltenvektor aufzufassen.

Folgende Themenkomplexe werden behandelt: §1: Bilinearformen, §2: Normalformentheorie, §3: General abstract nonsense, §4: Affine und projektive Geometrie. Die einzelnen Vorlesungskapitelteile werden mit kleinem l ("ell") durchnumeriert, also l1, l2, ... usw. Jedes solche Kapitel entspricht voraussichtlich einer Vorlesungseinheit.

Im §1 werden weiterführende Themen zu Bilinearformen behandelt, die Kapitel L22 - L26 aus LA I werden in §1 zuendegeführt und deren Resultate angewendet. Die neuen Themen in §1 sind der Sylvestersche Trägheitssatz in l2, Quadriken in l3 und die orthogonale Gruppe in l4/l5. Die dafür notwendigen Vorkenntnisse aus LA I wiederholen wir hier in l1 in drei Teilen ab S. -2-: Teil 1: Grundlagen zu Bilinearformen, Teil 2: normale Endomorphismen, Teil 3: Hauptachsentrafos.

In §2, dem Kapitel über Normalformen, erarbeiten wir die Jordansche Normalform und allgemeiner die Zerlegung eines Vektorraums nach einem Endomorphismus.

In §3 ist der Titel so gemeint: dieser ist der Fachbegriff für die Theorie der "Kommutativen Diagramme", die uns Tensoralgebren, äußere Algebren usw. liefern wird.

In §4 soll eine Kurzeinführung in die projektive Geometrie stattfinden.

Wiederholung Teil 1: (Sesqui-/Bi-)linearformen aus L22 in LA I

Die grundlegenden Begriffe waren folgende:

1.1. (L22.1) Def.: • Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abb. $b: V \times V \to K$ heißt Bilinearform, falls gilt: (1) $b(x_1+x_2, y_1) = b(x_1, y_1) + b(x_2, y_1)$
$b(x_1, y_1+y_2) = b(x_1, y_1) + b(x_1, y_2)$ } für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$

(2) i) $b(\alpha x, y) = \alpha\, b(x,y)$
ii) $b(x, \alpha y) = \alpha\, b(x,y)$ } für alle $x, y \in V$, $\alpha \in K$

• Ist außerdem $K = \mathbb{C}$ und gilt anstelle (2) ii) $b(x, \alpha y) = \bar{\alpha}\, b(x,y)$, so heißt b Sesquilinearform. ($\bar{\alpha}$: Konjugiert Komplexes von α!)

• Eine Abb. b heißt hermitesch, falls $b(x,y) = \overline{b(y,x)}$ für alle $x, y \in V$ gilt.

• Eine Abb. b heißt symmetrisch, falls $b(x,y) = b(y,x)$ für alle $x, y \in V$ gilt.

• Eine hermitesche Sesquilinearform heißt hermitesche Form.

1.2. (L22.8) Def.: Sei V ein K-VR, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. 1.) Eine hermitesche Form $b: V \times V \to K$ heißt positiv definit, falls 1. $b(x,x) \geq 0$ für alle $x \in V$ ← b pos. semidefinit
und 2. $b(x,x) = 0 \iff x = 0$. ← definit

2) Eine positiv definite hermitesche Form heißt auch positiv definites, hermitesches Skalarprodukt.

3) Eine reelle, positiv definite hermitesche Form heißt reelles Skalarprodukt.

→ (Ein reelles Skalarprodukt ist also eine positiv definite, symmetrische Bilinearform über $\mathbb{R}$.)

4.) Gilt nur 1. in 1.), so heißt b positiv semidefinit.

5.) Entsprechend negativ (semi-) definit, wenn "$\geq$" in 1.) 1. durch "$\leq$" ersetzt wird.

1.3. Der Begriff "Skalarprodukt" als positiv definite hermitesche Form (über $\mathbb{C}$) bzw. als positiv definite symmetrische Form (über $\mathbb{R}$) hat dann die ganze Geometrie entfesselt (L23/L24)! Nämlich dadurch, dass man dann "Orthogonalität" (d.h. Skalarprodukt zweier Vektoren ist $=0$) und "Vektorlängen" (d.h. Norm^2 = S.P. eines Vektors mit sich selbst ≥ 0) definieren kann. (da S.P. pos. semidefinit)

[Dabei soll nur der Nullvektor 0 die Länge/Norm $=0$ haben ⇒ S.P. pos. definit!]

Wir haben auch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für ein S.P. b geschrieben, also etwa $\langle x, y \rangle$ für $b(x,y)$, $x, y \in V$.

Bsp.: $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$b(x,y) = 2\xi_1\eta_1 + 3\xi_2\eta_2$

für $x,y \in \mathbb{R}^2$, $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}$

Bsp.: $b\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)$

$= 2\cdot1\cdot2 + 3\cdot3\cdot(-1)$

Beh.: b ist S.P.

- b ist bilinear:
  - $b(x+x', y) = 2(\xi_1+\xi_1')\eta_1 + 3(\xi_2+\xi_2')\eta_2$

    $= 2\xi_1\eta_1 + 3\xi_2\eta_2 + 2\xi_1'\eta_1 + 3\xi_2'\eta_2$

    $= b(x,y) + b(x',y)$ ✓ ...
  - $b(\alpha x, y) = \alpha\, b(x,y)$, ✓, 2. Komp. analog
- b ist symmetrisch:

  $b(y,x) = 2\eta_1\xi_1 + 3\eta_2\xi_2$

  $b(x,y) = 2\xi_1\eta_1 + 3\xi_2\eta_2 = b(y,x)$ ✓
- b ist pos. definit:

  $b(x,x) = 2\underbrace{\xi_1^2}_{\geq 0} + 3\underbrace{\xi_2^2}_{\geq 0} \geq 0$, semidef. ✓

  $b(x,x) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 0 = \xi_2 \Leftrightarrow x = 0$ ✓

$\mapsto$ Standard SP: $\left\langle \begin{pmatrix}2\\3+i\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\4i\end{pmatrix} \right\rangle = 2\cdot1 + (3+i)\cdot0 + (-1)\cdot\overline{(-4i)}$

e1
-3-

1.4. Auf dem $\mathbb{R}^n$ haben wir $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$ als Standard-S.P. ausgemacht ($x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$)

auf dem $\mathbb{C}^n$ haben wir $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}$ als Standard-S.P. ausgemacht ($x,y \in \mathbb{C}^n$).

Für $K=\mathbb{R}$ hieß ein VR mit reellem S.P. ein euklidischer Raum,

für $K=\mathbb{C}$ hieß ein VR mit komplexen S.P. ein unitärer Raum.

1.5. In L22.18 tat sich die Frage auf, wie man für andere Skalarprodukte sehen kann, ob sie positiv definit sind (damit man Normen/senkrechtstehen definieren kann).

Diese Frage beantworten wir, indem wir ein Kriterium in e2 zeigen werden. Dafür zeigen wir dieses Kriterium als Anwendung des Satzes von Sylvester.

Wiederholung Teil 2: Normale Endomorphismen aus L25 in LA I

Wir wiederholen den grundlegenden Begriff des adjungierten Homom./der adjungierten Matrix aus L25:

1.6. Satz und Def. (hermitesch adjungierter Homomorphismus):
(L25.2) Seien U,V zwei endl. dim. K-VRe, $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$.

Sei $f\in \mathrm{Hom}(U,V)$. Dann gibt es genau eine lineare Abb. $f^*\in\mathrm{Hom}(V,U)$, so dass für alle $u\in U$, $v\in V$ gilt: $\langle f(u),v\rangle_V = \langle u, f^*(v)\rangle_U$.

f^* heißt der zu f (hermitesch) adjungierte Homomorphismus / bzw. die (hermitesch) adjungierte lineare Abb., kurz die "Adjungierte" von f.

Doch wir haben daraufhin nur die Situation $U=V$ betrachtet, d.h. für Endos f.

Durch Übergang zu einer Matrixdarstellung A von f bezüglich Orthonormalbasen (ONBen) erhält man die Matrixdarstellung A^* von f^* (vgl. L25.3)

Dies ist genau die

1.7. Adjungierte Matrix: $A^* = \overline{A}^T$ (diese ist leicht zu bekommen durch Transponieren und Komplex Konjugieren).

f erfüllt: $\langle f(x),y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ für alle $x,y\in V$

und A erfüllt: $\langle Ax,y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ für alle $x,y\in K^n$, $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

1.8. Haben dann nur noch spezielle Endos (und ihre Matrizen) behandelt, nämlich normale; die anderen sind Spezialfälle normaler Endos (vgl. L25.5), hier die Übersicht über die Definitionen:

	Endo $f \in \mathrm{End}(V)$	Matrix $A \in K^{n\times n}$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$	
normal	$f \circ f^* = f^* \circ f$	$AA^* = A^*A$	
unitär	$f^* = f^{-1}$	$A^* = A^{-1}$	A ist leicht zu invertieren!
↳ über $\mathbb{R}$: orthogonal	$f^T = f^{-1}$	$A^T = A^{-1}$	
selbstadjungiert (hermitesch)	$f^* = f$	$A^* = A$	
↳ über $\mathbb{R}$: symmetrisch	$f^T = f$	$A^T = A$	

normale ←

↳ f^T ist die Abb., die zu A^T geh.: $f^T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; x \mapsto A^T x$

1.9. Aus L25.8: • $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär $\Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ONB, für diese Matrizen gilt $|\det(A)| = 1$.

• $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal $\Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ONB, für diese Matrizen gilt $\det(A) \in \{+1, -1\}$.

1.10. Aus L23.12/13: Dabei kann $\det(A)$ als Orientierung der Achsen gedeutet werden, die durch die orthogonalen Spalten von A gegeben sind. (Haben dies nur im $\mathbb{R}^3$ gesehen; werden in ℓ4/ℓ5 verallgemeinern/vertiefen, was eine "Orientierung" in allgemeineren Situationen heißen soll.)

1.11. Aus L25.9: V ein $\mathbb{C}$-VR. Dann: f normal $\Leftrightarrow$ V hat ONB aus EVen von f.

bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^n$ hat ONB aus EVen von A.

Weiter: EVen zu verschiedenen EWen eines normalen Endos f sind orthogonal (L25.11(4)).

Wiederholung Teil 3: Hauptachsentransformationen aus L26 in LA I

1.12. Zentrales Ergebnis: H.A.-Trafos gehen für normale Matrizen (Satz L26.2), d.h. jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lässt sich auf Diagonalgestalt bringen (mit einer ONB):
$\exists\, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, X unitär, mit $X^{-1} A X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EWe von A.
Die Matrix X bekommt man mit den EVen von A als Spalten für X; bilden ja ONB.

Bsp.: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4i & 5 & -6 \\ 7+i & 3i & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^* = \overline{A}^T$$

$$\rightsquigarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4i & 7-i \\ 2 & 5 & -3i \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$\forall x, y \in \mathbb{C}^3: \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$

In diesem Sinn ist die "Hauptachsentrafo" eine spezielle Art der Diagonalisierbarkeit. Warum diese überhaupt "Hauptachsentransformation" heißen, wird in Kapitel ℓ3 klar, wo wir als Anwendung Quadriken behandeln, womit etwa Ellipsengleichungen anschaulich auf die beiden "Hauptachsen" der Ellipse gebracht und vereinfacht werden.
Wir haben folgende Spezialfälle der H.A.trafo behandelt:

1.13. Satz über die reelle H.A.trafo für symmetrische Endos bzw. Matrizen:
(L26.3) Jede symmetrische (reelle) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eine ONB aus EVen in $\mathbb{R}^n$.
Sie lässt sich mit einer (reellen) orthogonalen Matrix X auf Diagonalform bringen: $X^{-1}AX = X^TAX = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. (reelle EWe von A)
⌈Vor allem deshalb, weil die EWe einer selbstadjungierten Matrix stets reell sind.⌋

1.14. Die H.A.trafo einer orthogonalen Matrix führt zu folgender Normalform einer orthogonalen Matrix:
(L26.10) Satz: Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (d.h. mit $A^T = A^{-1}$) gibt es eine ONB $(x_1, \dots, x_n)$ des $\mathbb{R}^n$, bezüglich der A die folgende Gestalt hat:

$$X^* A X = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & R_1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_s \end{pmatrix},$$

wobei $X = (x_1 | \dots | x_n)$ aus den x_i als Spalten gebildet wird (sodass $X^* = X^{-1}$, beachte $X^* = X^T$),

und die R_j, $j = 1, \dots, s$, Drehmatrizen der Form
$$R_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}, \ \varphi_j \in \mathbb{R}, \text{ sind.}$$

Somit bewirkt eine durch eine orthogonale Matrix beschriebene lineare Abb. folgendes:

diese UVRe müssen nicht alle existieren
1. Auf einem UVR, dem Eigenraum zum EW +1, wirkt f als Identität,
2. auf einem weiteren UVR, dem Eigenraum zu −1, wirkt f als Spiegelung,
3. auf weiteren 2-dimensionalen UVRen wirkt f als ebene Drehung.

Alle diese Räume sind paarweise orthogonal und spannen ganz $\mathbb{R}^n$ auf.

1.15. Eine Frage, die sich auftut und in ℓ4/ℓ5 beantwortet werden soll: Können orthogonale Abbildungen stets auch als Hintereinanderausführen (→ Matrizenprodukt) bestimmter einfacher (und weniger) Drehungen / (Dreh-)Spiegelungen / … dargestellt werden?
Also in Einzelabbildungen mit jeweils bestimmter geometrischer Art "zerlegt" werden?

1.16. Die in L26.8 eingeführten Matrixgruppen sollen näher behandelt werden in ℓ4/ℓ5.