Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§1: Bilinearformen

l2: Trägheitssatz von Sylvester

Stichworte: Signatur eines selbstadj. Endos/selbstadj. Matrix, (Semi-) Definitheit, Trägheitssatz von Sylvester, Hauptunterdeterminanten, Hurwitz-Kriterium

---

Wir haben in $\overset{\text{LA I}}{26.3/25.9}$ gesehen, dass ein selbstadjungierter Endomorphismus f eines endl. dim. unitären Raums V eine ONB aus EVen besitzt, die sämtlich zu reellen EWen gehören. Die Vorzeichen der EWe spielen eine Rolle. Sei im folgenden V stets ein endl. dim. unitärer Raum mit S.P. $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2.1. **Def. (Signatur):** Sei f selbstadjungierter Endo des endl. dim. unitären Raums V. Weiter sei V_+ bzw. V_- bzw. V_0 der von allen Eigenvektoren zu positiven bzw. negativen Eigenwerten, bzw. zum EW $=0$, aufgespannte UVR.

(D.h. also
$$V_+ := L(\{v\in V;\ \exists\lambda>0: f(v)=\lambda v\}),$$
$$V_- := L(\{v\in V;\ \exists\lambda<0: f(v)=\lambda v\}),$$
$$V_0 := L(\{v\in V;\ f(v)=0\cdot v=0\}) = \ker f.\ )$$

Sei $k_+ := \dim V_+$, $k_- := \dim V_-$, $k_0 := \dim V_0$, wo $k_+ + k_- + k_0 = \dim V$.
Dann heißt das Zahlentripel $(k_+, k_0, k_-)\in\mathbb{N}_0^3$ die Signatur von f.
Für eine selbstadjungierte Matrix $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (wird mit dem Endo $x\mapsto Ax$) entsprechend die Signatur der Matrix A definiert.

2.2. **Bsp.:** $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Signatur $(\underset{\#\text{pos EW}}{1}, \underset{\#\text{EW } 0}{0}, \underset{\#\text{neg EW}}{1})$, $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ hat die Signatur $(2,0,0)$, denn die EWe von B sind $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$, beide >0.

2.3 **Bem.:** Für selbstadjungiertes f gilt $\forall x\in V$:
$$\langle f(x),x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle \underset{f^*=f}{=} \langle x, f(x)\rangle = \overline{\langle f(x),x\rangle}, \text{ d.h. } \langle f(x),x\rangle\in\mathbb{R}.$$

Speziell für $x\in V_+$ gilt $\langle f(x),x\rangle = \langle\lambda x,x\rangle = \lambda\|x\|^2 > 0$, da $\lambda>0$,
für $x\in V_0$ gilt $\langle f(x),x\rangle = \langle 0,x\rangle = 0$,
für $x\in V_-$ gilt $\langle f(x),x\rangle = \langle\lambda x,x\rangle = \lambda\|x\|^2 < 0$, da $\lambda<0$.

2.4. **Def. (definit):** Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, $U \subseteq V$ ein UVR. Dann heißt

f auf U positiv definit $:\Leftrightarrow \forall x \in U\setminus\{0\}: \langle f(x), x\rangle > 0$,

f auf U negativ definit $:\Leftrightarrow \forall x \in U\setminus\{0\}: \langle f(x), x\rangle < 0$,

f auf U positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \forall x \in U\setminus\{0\}: \langle f(x), x\rangle \geq 0$,

f auf U negativ semidefinit $:\Leftrightarrow \forall x \in U\setminus\{0\}: \langle f(x), x\rangle \leq 0$.

Ist kein UVR U spezifiziert, ist $U=V$ gemeint.

2.5 **Bem.:** Das ganze wird entsprechend für selbstadjungierte Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert, etwa:

A positiv definit $:\Leftrightarrow \langle Ax, x\rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, wo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-S.P.

Ist A positiv definit, wird mit $\langle x,y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

also eine positiv definite hermitesche Form, also ein S.P. definiert, vgl. LAI 22.18.

2.6 **Bem.:** Auf V_+ bzw. V_- ist f positiv bzw. negativ definit, auf $V_+ + V_0$ bzw. $V_- + V_0$ ist f positiv bzw. negativ semidefinit. Diese UVRe sind auch maximal unter dieser Bedingung:

2.7 **Satz:** Sei U ein UVR von V, $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.

Ist f positiv/negativ definit auf U, so ist $\dim U \leq k_+ \;/\; \dim U \leq k_-$.

Ist f positiv/negativ semidefinit auf U, so ist $\dim U \leq k_+ + k_0 \;/\; \dim U \leq k_- + k_0$.

Bew.: Sei f pos. def. auf U, dann ist $\forall x \in U\setminus\{0\}: \langle f(x), x\rangle > 0$.

Ist $x \in V_- + V_0$, so ist $\langle f(x), x\rangle \leq 0$. Dann ist $U \cap (V_- + V_0) = \{0\}$,

somit $k_+ + k_0 + k_- = \dim V \geq \dim(U + V_0 + V_-) = \dim U + \dim V_0 + \dim V_-$

$= \dim U + k_0 + k_-$, also $\dim U \leq k_+$. Analog die anderen Aussagen. $\square$

2.8 **Trägheitssatz von Sylvester:** Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert und $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch B^*AB selbstadjungiert, und A und B^*AB haben dieselbe Signatur.

Bew.: Es ist $(B^*AB)^* = B^* A^* (B^*)^* = B^* A B$, d.h. B^*AB ist selbstadj.

Es seien (k_+, k_0, k_-) bzw. (k_+', k_0', k_-') die Signaturen von A bzw. B^*AB, sowie V_+, V_0, V_- bzw. V_+', V_0', V_-' die entsprechenden UVRe in 2.1.

Dann haben wir für $x \in V_+' \setminus \{0\}$: $0 < \langle B^* A B x, x\rangle = \langle A \underbrace{Bx}_{y}, \underbrace{Bx}_{y}\rangle$,
also auch A pos. def. auf $BV_+' := \{y;\ \exists x \in V_+' : y = Bx\}$.
Nach 2.5 ist dann $\dim BV_+' \leq k_+$, und da B invertierbar,
ist $\dim BV_+' = \dim V_+'$, also folgt $k_+' \leq k_+$.
Nun ist $A = (B^{-1})^* \cdot (B^* A B) \cdot B^{-1}$, und derselbe Schluss wie eben zeigt $k_+ \leq k_+'$, also ist $k_+ = k_+'$. Analog geht man für k_0, k_- vor. □

2.9. Bsp.: Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$, $A_2 := B^* A_1 B$ mit $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Dann ist $A_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -50 \end{pmatrix}$. Somit hat A_2 die EWe $25, -50$, also die Signatur $(1, 0, 1)$. Nach Satz 2.8 von Sylvester muss A_1 dieselbe Signatur haben.
Die EWe von A_1 sind die Nullstellen von $\det(A_1 - T\, I_2)$
$= \det \begin{pmatrix} 2-T & -6 \\ -6 & -7-T \end{pmatrix} = (2-T)(-7-T) - 36 = T^2 + 5T - 50 = (T-5)(T+10)$,
also 5 und -10. Diese EWe sind zwar verschieden von denen von A_2, aber mit derselben Vorzeichenverteilung, d.h. Signatur.

Wir geben nun als Anwendung des Satzes von Sylvester ein Kriterium für Definitheit.

2.10. Def.: Sei $A \in K^{m \times m}$ eine Matrix über K. Für $j = 1, \ldots, m$ sei A_j die Matrix, die durch Streichen der letzten $m-j$ Zeilen und $m-j$ Spalten entsteht.
Dann nennt man $\det A_1, \det A_2, \ldots, \det A_m$ die Hauptunterdeterminanten von A.
Eine andere, übliche Bezeichnung ist Hauptminoren von A.

2.11. Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ hat die Hauptunterdet. $\underbrace{\det(1)}_{A_1} = 1$, $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A_2} = 5 - 8 = -3$, $\det \underbrace{A}_{A_3} = 0$.

2.12. Satz (Hurwitz-Kriterium): Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ selbstadjungiert. Dann ist A genau dann positiv definit (auf ganz $\mathbb{C}$), wenn alle Hauptunterdeterminanten von A positiv sind.

Bew.: „$\Rightarrow$": Ist A pos. def., so ist $V_+ = \mathbb{C}^n$, d.h. alle EWe sind > 0.
Die Determinante von A ist das Produkt der EWe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. [Denn nach LAI 26.2 ist $A = X^{-1} \Lambda X$ mit $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, also $\det A = \det(X^{-1}\Lambda X) = \det \Lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_m$.]
Also folgt $\det A > 0$ ⊛. Betr. die Untermatrix $\hat{A} = A_{m-1}$, die durch Streichen der letzten Zeile und letzten Spalte entsteht, so dass $A = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & c \\ \hline c^* & \gamma \end{array}\right)$ mit $\gamma \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}^{m-1}$.
Wir schreiben jetzt $x = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \xi_m \end{pmatrix}$ mit $\hat{x} \in \mathbb{C}^{m-1}$.
Da für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die Ungl. $\langle Ax, x\rangle > 0$ gilt, gilt dies auch für die x mit $\xi_m = 0$, $\hat{x} \neq 0$, dafür ist $\langle Ax, x\rangle = \langle \hat{A}\hat{x}, \hat{x}\rangle$.
Mit A ist auch $\hat{A}$ selbstadj., also ist $\hat{A}$ pos. def. (auf ganz $\mathbb{C}^{m-1}$), und daher $\det \hat{A} > 0$ (nach ⊛ für $\hat{A}$ angewendet).
Streichen wir symmetrisch eine andere Zeile und Spalte, kann genauso vorgegangen werden. Also gilt per Induktion, dass alle Hauptunterdeterminanten > 0 sind.

„$\Leftarrow$": Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ selbstadjungiert und alle Hauptunterdeterminanten > 0.
Mit Induktion nach m zeigen wir, dass A positiv definit ist:
$m = 1$: $A = (\alpha)$, $\det A > 0 \Rightarrow \alpha > 0$: Für $\xi \neq 0$ ist dann $\langle Ax, x\rangle = \alpha \bar{\xi} \cdot \xi = \alpha |\xi|^2 > 0$.
$m-1 \rightsquigarrow m$: Wie eben schreiben wir $A = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & c \\ \hline c^* & \gamma \end{array}\right)$. Die Hauptunterdeterminanten von $\hat{A}$ sind auch solche von A,
somit alle > 0 und daher $\hat{A}$ pos. def. nach Induktionsvoraussetzung.
Ferner ist $\det \hat{A} > 0$, also ex. $z \in \mathbb{C}^{m-1}$ mit $\hat{A} z = -c$ ($\hat{A}$ invertierbar).
Setzen $B := \left(\begin{array}{c|c} I_{m-1} & z \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{C}^m$, wo $\det B = 1$, also B invertierbar ist.
(Auch gilt $\det B^* = 1$.)

Nach dem Satz 2.8 von Sylvester ist A genau dann pos. def., wenn $B^* A B$ pos. def. ist. Nun gilt
$$B^* A B = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & 0 \\ \hline 0^T & c^* z + \gamma \end{array}\right),$$
also ist
$$0 < \det A = \underbrace{\det B^*}_{=1} \cdot \det A \cdot \underbrace{\det B}_{=1} = \det(B^* A B) = (\det \hat{A}) \cdot \underbrace{(c^* z + \gamma)}_{=:\alpha},$$

und da auch $\det \hat{A} > 0$, folgt $\alpha := c^* z + \gamma > 0$.

Also hat B^*AB die Gestalt $\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & o \\ \hline o^T & \alpha \end{array}\right)$ mit $\hat{A}$ pos. def. und $\alpha > 0$.

Nun ist für $x = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \xi_n \end{pmatrix}$: $B^*ABx = \begin{pmatrix} \hat{A}\hat{x} \\ \alpha \cdot \xi_n \end{pmatrix}$,
also $\langle B^*ABx, x\rangle = \langle \hat{A}\hat{x}, \hat{x}\rangle + \alpha \xi_n^2 > 0$ für $x \neq 0$, also ist B^*AB pos. def.,
nach Satz 2.8 von Sylvester also A pos. def. □

2.13 Kriterien für Definitheit: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert (d.h. im Fall $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch). Dann gilt:

(a) A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle EWe > 0
(b) A positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle EWe ≥ 0
(c) A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle EWe < 0
(d) A negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ alle EWe ≤ 0
(e) A indefinit (d.h. weder positiv noch negativ semidefinit)
$\Leftrightarrow$ A besitzt positive und negative EWe

Bew.: Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation $\overset{\text{LAI}}{26.2}$ ist $A = X^{-1}\Lambda X$ mit $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die EWe von A sind, und X unitär. Die verschiedenen Definitheiten von A sind dieselben wie die von Λ laut Satz 2.8 von Sylvester. Das Hurwitzkriterium 2.12 übersetzt die Aussagen über Definitheit über Aussagen über das Vorzeichen der EWe wie angegeben. □