Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§3: General abstract nonsense

l20: Zwei Anwendungen von äußeren Algebren

Stichworte: Verallgemeinerung des Laplaceschen Entwicklungssatzes, Rang einer Matrix und nichtverschwindende Unterdeterminanten, Dachprodukt von Basiselementen, Plücker-Koordinaten & projektive Geometrie

20.1. 1. Anwendung:

Wir wenden die in l19 formulierte Konstruktion einer äußeren Algebra $E(V)$ jetzt an auf den Fall $V=K^m$ mit den üblichen kanonischen Einheitsvektoren e_i als Basis. Jedes $x\in V$ ist also ein Spaltenvektor $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$,
und die Funktionale sind einfach

$$\varphi_{i_1\dots i_n}(x_1\wedge\dots\wedge x_n)=\Delta_{i_1\dots i_n}(x_1,\dots,x_n)=\det\begin{pmatrix}\alpha_{i_1,1} & \cdots & \alpha_{i_1,n}\\ \alpha_{i_2,1} & \cdots & \alpha_{i_2,n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{i_n,1} & \cdots & \alpha_{i_n,n}\end{pmatrix},$$

d.h. wir schreiben die Spalten $x_1,\dots,x_n$ nebeneinander, streiche die Zeilen mit Nummern $i\notin\{i_1,\dots,i_n\}$ heraus und bilde die Determinante.
Insbesondere ist $\Delta_{12\dots m}(x_1,\dots,x_m)=\det(x_1,\dots,x_m)$ die gewöhnliche Determinante.
Damit ist für alle n mit $1<n<m$ dann

$$\det(x_1,\dots,x_m)\,e_1\wedge\dots\wedge e_m\overset{l19}{=}\underline{x_1\wedge\dots\wedge x_m}=(x_1\wedge\dots\wedge x_n)\wedge(x_{n+1}\wedge\dots\wedge x_m)$$

$$\overset{19.18(iv)}{=}\Big(\sum_{1\le i_1<\dots<i_n\le m}\varphi_{i_1\dots i_n}(x_1\wedge\dots\wedge x_n)\,e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}\Big)$$
$$\wedge\Big(\sum_{1\le j_1<\dots<j_{m-n}\le m}\varphi_{j_1\dots j_{m-n}}(x_{n+1}\wedge\dots\wedge x_m)\,e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_{m-n}}\Big)$$

$$=\sum_{\substack{i_1<\dots<i_n\\ j_1<\dots<j_{m-n}}}\Delta_{i_1\dots i_n}(x_1,\dots,x_n)\cdot\Delta_{j_1\dots j_{m-n}}(x_{n+1},\dots,x_m)\,e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}\wedge e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_{m-n}}$$

Bei den hier auftretenden Produkten $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{m-n}}$ sind entweder zwei Indizes gleich (dann ist das Produkt $= 0$), oder sie sind verschieden. Dann ist $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{m-n}} = \pm e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_m$, wobei man das richtige Vorzeichen bekommt als $(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_n+\frac{n(n+1)}{2}}$. [Bew. lang...]

Also ist

$$\boxed{\det(x_1,\ldots,x_m) = \sum (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_n+\frac{n(n+1)}{2}} \Delta_{i_1\ldots i_n}(x_1,\ldots,x_n)\cdot\Delta_{j_1\ldots j_{m-n}}(x_{n+1},\ldots,x_m).} \quad \} \circledast$$

Dabei ist jeweils zu summieren über alle Indextupel $1 \le i_1 < \ldots < i_n \le m$ und $1 \le j_1 < \ldots < j_{m-n} \le m$, so dass $\{i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_{m-n}\} = \{1,\ldots,m\}$.

20.2. Wenden wir dies an für $\underline{\underline{n=1}}$. Dann ist $\Delta_i(x_1) = \Delta_i\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots \\ \alpha_{m1}\end{pmatrix} = \alpha_{i1}$,

und $\Delta_{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,m}(x_2,\ldots,x_m) = \det\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{i-1,2} & \alpha_{i-1,3} & \cdots & \alpha_{i-1,m}\\ \alpha_{i+1,2} & \alpha_{i+1,3} & \cdots & \alpha_{i+1,m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m,2} & \alpha_{m,3} & \cdots & \alpha_{m,m}\end{pmatrix}}$ ← Streichungsmatrix A_{i1} aus Matrix $(x_1,\ldots,x_m)$ bzgl. Zeile i und Spalte 1, vgl. LA I, 19.17

Damit ist

$n=1: \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$

$$\det(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1}\alpha_{i1}\det A_{i1},$$ bekannt als Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte.

Mit Formel $\circledast$ haben wir also eine Verallgemeinerung des Laplaceschen Entwicklungssatzes gewonnen.

$\Rightarrow m=4,\ n=2$

20.3. Am Beispiel einer 4×4-Matrix lautet unsere gewonnene Verallgemeinerung des Laplace-schen Entwicklungssatzes etwa

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_{\Delta_{12}(a|b)} \overbrace{\det\begin{pmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}}^{\Delta_{34}(c|d)} - \overbrace{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}}^{\Delta_{13}(a|b)} \overbrace{\det\begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}}^{\Delta_{24}(c|d)}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$+ \det\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Doch können wir allgemein für $m\times m$-Matrizen die Determinante darstellen als Summe der Produkte aus den ersten n Spalten gebildeten Determinanten und den dazu Komplementären aus den letzten $m-n$ Spalten, wobei noch das Vorzeichen richtig zu wählen ist.

Da eine Determinante höchstens das Vorzeichen ändert, wenn man Spalten vertauscht oder transponiert, kann man also analoge Formeln erhalten, indem man sich irgendwelche n Spalten wählt und dann die daraus bzw. den übrigen Spalten gebildeten Determinanten betrachtet. Analog kann man alles mit Zeilen machen.

...

Aus Satz 19.18 (vi) erhalten wir noch:

=Spaltenanzahl
=Zeilenanzahl

20.4. **Satz:** Der Rang einer $m\times k$-Matrix ist gleich der Reihenzahl ihrer größten nichtverschwindenden Unterdeterminante.

Bew.: Seien $x_1,\dots,x_m$ irgendwelche Spalten der Matrix. Dann ist

$$x_1\wedge\dots\wedge x_m = \sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le m} \Delta_{i_1\dots i_m}(x_1,\dots,x_m)\cdot e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m}.$$

1.) Sind $x_1,\dots,x_m$ unabhängig, so ist $x_1\wedge\dots\wedge x_m\neq 0$, somit wenigstens eine m-reihige Unterdeterminante $\Delta_{i_1\dots i_m}(x_1,\dots,x_m)\neq 0$.

2.) Sind $x_1,\dots,x_m$ abhängig, so ist $x_1\wedge\dots\wedge x_m=0$, somit sind alle $\Delta_{i_1\dots i_m}(x_1,\dots,x_m)=0$, denn es handelt sich bei ⊠ um eine Basisdarstellung in $E_m(K^m)$. □

---

2. Anwendung: Wir erwähnen noch eine Anwendung, die für die projektive Geometrie relevant ist.

20.5. **Satz:** Sei V ein K-VR, $U\subseteq V$ ein UVR, $(x_1,\dots,x_m)$ und $(y_1,\dots,y_m)$ seien Basen von U. Dann gibt es eine Konstante $\gamma\in K$, $\gamma\neq 0$, mit $x_1\wedge\dots\wedge x_m=\gamma\cdot y_1\wedge\dots\wedge y_m\in E_m(V)$.

Bew.: i) Enthalten die Basen dieselben Elemente in verschiedener Reihenfolge, stimmen die Produkte bis auf das Vorzeichen überein.

ii) Jedes x_i lässt sich als Linearkombination der y_i schreiben. Setzen wir dies ein und rechnen distributiv aus, so erhält man eine Darstellung vom Typ

$$x_1\wedge\dots\wedge x_m=\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{m}\alpha_{i_1\dots i_m}\cdot y_{i_1}\wedge\dots\wedge y_{i_m}$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_{i_1\dots i_m}\in K$.

Für die auftretenden y-Produkte gilt

- entweder: Zwei Indizes sind gleich, dann ist das Produkt $=0$.
- oder: Alle sind verschieden, dann handelt es sich nach i) bis auf das Vorzeichen um das Produkt $y_1\wedge\dots\wedge y_m$. Somit haben wir

$$x_1\wedge\dots\wedge x_m=\gamma\cdot y_1\wedge\dots\wedge y_m,$$

und da beide Produkte $\neq 0$ sind (die x_i und die y_i sind unabh.!), muss $\gamma\neq 0$ sein. □

Satz: Sei V ein K-VR, $U \subseteq V$ ein UVR, $(x_1, \dots, x_m)$ und $(y_1, \dots, y_m)$ seien Basen von U. Dann gibt es eine Konstante $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$,
mit $x_1 \wedge \dots \wedge x_m = \gamma \cdot y_1 \wedge \dots \wedge y_m \in E_m(V)$.

Bem.: Die Unterräume $L(x_1, \dots, x_m) = L(y_1, \dots, y_m)$ der Dimension m werden durch die Angabe von $\underbrace{x_1 \wedge \dots \wedge x_m}_{= \gamma \cdot y_1 \wedge \dots \wedge y_m} \in E_m(V)$ charakterisiert.

z.B.

Unterräume der Dimension 2 in $V = \mathbb{R}^3$ also durch Angabe von $x_1 \wedge x_2 \in E_m(V) = E_2(\mathbb{R}^3)$

Ebenen im $\mathbb{R}^3$: $L(x_1, x_2)$ (durch 0)

Gehen wir nun etwa aus von $\widetilde{V} = K^m$ mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_m$.
Dann haben wir

$$E_n(K^m) \ni x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{i_1 < \ldots < i_n} \Delta_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n) e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} . \qquad \boxed{*}$$

Der eben bewiesene Satz 20.5 besagt: Sind $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ Basen desselben Unterraumes U, so gibt es ein $\gamma \neq 0$, so dass $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \gamma \cdot y_1 \wedge \ldots \wedge y_n$, d.h. dass für alle Indextupel $i_1 < \ldots < i_n$ gilt:

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n) = \gamma \cdot \Delta_{i_1 \ldots i_n}(y_1, \ldots, y_n).$$

20.6. **Def. und Satz:** Das $\binom{m}{n}$-Tupel $(\Delta_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n);\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m)$ zu einer Basis $(x_1, \ldots, x_n)$ eines Unterraums $U \subseteq K^m$ nennt man die *homogenen Koordinaten* bzw. *Plücker-Koordinaten* von U.
Sie sind durch U bis auf einen Faktor $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$, eindeutig bestimmt.
Plücker-Koordinaten zu verschiedenen Unterräumen sind linear unabhängig.

20.7. **Beispiele:**
- $U = L(x_1)$: Die Plücker-Koordinaten sind $(\overset{\xi_i}{\widetilde{\Delta_i(x_1)}};\ 1 \leq i \leq m)$, bestehend aus allen 1-reihigen Unterdeterminanten der Spalte (x_1). Dies liefert x_1 selbst.
- $U = L(x_1, x_2)$: Wir haben die 2-reihigen Unterdeterminanten der Matrix (x_1, x_2) zu betrachten. Tun wir dies explizit für $m = 3$: $V = K^3$, $n = 2$

Dann haben wir

$$(x_1, x_2) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \right), \qquad \Delta_{12}(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{13}(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{23}(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix},$$

d.h. der Vektor $\begin{pmatrix} \Delta_{12} \\ \Delta_{13} \\ \Delta_{23} \end{pmatrix}$ ist, bis auf das Vorzeichen des mittleren Terms, das Vektorprodukt von x_1 und x_2.

Diese Plücker-Koordinaten sind nichts anderes als Basisdarstellungen der Elemente $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ in $E_m(V)$. Damit ist dann über Formel $\boxed{*}$ implizit auch eine Multiplikation $\wedge$ von Plücker-Koordinaten zu verschiedenen Unterräumen gegeben. 2

Insbesondere erhält man:

20.8. <u>Satz</u>: Zwei Unterräume X und Y von V haben genau dann einen nichttrivialen Unterraum gemeinsam, d.h. $X \cap Y \neq \{0\}$, wenn das Produkt der Plücker-Koordinaten verschwindet bzw. äquivalent, dass das $\wedge$-Produkt von Basen von X, Y verschwinden.

<u>Bew.</u>: Nach der Dimensionsformel gilt $\dim X + \dim Y = \dim(X \cap Y) + \dim(X+Y)$,
also $\dim(X \cap Y) > 0 \iff \dim(X+Y) < \dim X + \dim Y$.
Sind $(x_1, \dots, x_m)$ und $(y_1, \dots, y_k)$ Basen von X und Y,
so ist $\dim(X+Y) < m+k$ genau wenn $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$ linear abhängig.
Genau dann ist aber $x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_k = (x_1 \wedge \dots \wedge x_m) \wedge (y_1 \wedge \dots \wedge y_k) = 0$. □

20.9. Zuletzt noch ein paar Hinweise auf die Bedeutung des äußeren Produkts für die projektive Geometrie: Wir nehmen den $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ mit den kanonischen Einheitsvektoren e_0, e_1, e_2 als "Modell" für den geometrischen Euklidischen Raum mit kartesischem Koordinatensystem.
Jeder Punkt $x \neq 0$ erzeugt eine Gerade durch 0, je zwei unabhängige x, y eine Ebene durch 0, drei unabhängige x, y, z den ganzen Raum.
Nun betrachten wir die äußere Algebra $E(\mathbb{R}^3)$.
Dabei ist $E_1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ mit Basis e_0, e_1, e_2, ferner ist $\dim E_2(\mathbb{R}^3) = \binom{3}{2} = 3$
und darin etwa $\varepsilon_0 := e_1 \wedge e_2$, $\varepsilon_1 := e_2 \wedge e_0$, $\varepsilon_2 := e_0 \wedge e_1$ eine Basis.
Nach Satz 20.5 beschreiben die ε_i jeweils 2-dimensionale Unterräume, also Ebenen durch den Nullpunkt, und zwar sind dies gerade die Koordinatenebenen.

Dies gilt nun sinngemäß für alle Elemente von $E_2(\mathbb{R}^3)$:

Ist nämlich $\eta = \eta_0\varepsilon_0 + \eta_1\varepsilon_1 + \eta_2\varepsilon_2 \in E_2(\mathbb{R}^3)$ und etwa $\eta_0 \neq 0$,

so gilt mit $x_1 := \eta_1 e_0 - \eta_0 e_1$, $x_2 := -\eta_2 e_0 - \eta_0 e_2$ dann $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} x_1 \wedge x_2 &= (\eta_1 e_0 - \eta_0 e_1) \wedge (\eta_2 e_0 - \eta_0 e_2) \\ &= \eta_1\eta_2 e_0 \wedge e_0 - \eta_1\eta_0 e_0 \wedge e_2 \\ &\quad - \eta_0\eta_2 e_1 \wedge e_0 + \eta_0\eta_0 e_1 \wedge e_2 \\ &= \eta_0(\eta_0 e_1 \wedge e_2 + \eta_1 e_2 \wedge e_0 + \eta_2 e_0 \wedge e_1) = \eta_0 \cdot \eta. \end{aligned}$$

Somit beschreibt jedes Element $(\neq 0)$ von $E_2(\mathbb{R}^3)$ eine Ebene durch den Nullpunkt.

Charakterisieren wir diese Ebene als Punktmenge. Dazu rechnet man zunächst nach, dass gilt: $\varepsilon_i \wedge e_j = \delta_{ij}\, e_0 \wedge e_1 \wedge e_2$, mit $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Nach Satz 20.8 liegt der Punkt $x = \sum_{j=0}^{2} \xi_j e_j$ in der Ebene $\eta = \sum_{i=0}^{2} \eta_i \varepsilon_i$, genau wenn $\eta \wedge x = 0$.

Nun ist $\eta \wedge x = \left(\sum_i \eta_i \varepsilon_i\right) \wedge \left(\sum_j \xi_j e_j\right) = \sum_{i,j} \eta_i \xi_j\, \varepsilon_i \wedge e_j$

$$= \left(\sum_{i,j} \eta_i \xi_j \delta_{ij}\right) e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 = \left(\sum_{i=0}^{2} \eta_i \xi_i\right) e_0 \wedge e_1 \wedge e_2,$$

und dies ist $= 0$ genau wenn $\sum_{i=0}^{2} \eta_i \xi_i = 0$ ist.

x beschreibt Ebene in Normalenglg.

Somit haben wir Folgendes: Ordnen wir der Ebenen $\eta = \sum \eta_i \varepsilon_i$ den Punkt $y := \sum \eta_i e_i$ zu, so gilt:

x liegt in η genau wenn die Vektoren x, y orthogonal sind, d.h. y ist der Normalenvektor der Ebenen η.

Versuchen Sie sich nun mal in der geometrischen Anschauung klarzumachen, was die Addition in $E_2(\mathbb{R}^3)$, d.h. die Addition von Ebenen bedeutet. Ü

Für Punktvektoren ist dies ja über die Parallelogrammregel klar.

20.10. Die obigen Überlegungen zeigen auch, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to E_2(\mathbb{R}^3), \quad x = \sum \xi_j e_j \mapsto \varphi(x) = \sum \xi_j \varepsilon_j$$

jedem Vektor x die dazu orthogonale Nullpunkts-Ebene $\underline{\varphi(x)}$ zuordnet.
Schalten wir eine Abb. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit einer symmetrischen Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ davor, so erhalten wir $\Psi(x) := \varphi(\underline{Ax})$, wobei wieder jedem Punktvektor eine Ebene durch den Nullpunkt zugeordnet wird.
Sei $\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{R}^3;\ \underline{\Psi(x) \wedge x = 0}\}$, also die Menge der Punkte, die auf der ihnen jeweils zugeordneten Ebene liegen.
Nun ist $\Psi(x) = \sum_i \big(\underbrace{\sum_j \alpha_{ij} \xi_j}\big) \underline{\varepsilon_i}$ und damit

$$\underline{\Psi(x) \wedge x} = \underline{\Big(\sum_i \big(\sum_j \alpha_{ij} \xi_j\big)\varepsilon_i\Big)} \wedge \underline{\Big(\sum_k \xi_k e_k\Big)} = \Big(\underline{\underline{\sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j}}\Big)\, \underline{\underline{e_0 \wedge e_1 \wedge e_2}},$$

und dies ist $= 0$ genau wenn $\underline{\sum_{i,j} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j = 0}$,

und dies sind im wesentlichen die in Kapitel $\underline{l3}$ behandelten Flächen 2. Grades/Quadriken.

Ende der Vorlesung