Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§1: Bilinearformen

ℓ2: Trägheitssatz von Sylvester

Stichworte: Signatur eines selbstadj. Endos/selbstadj. Matrix, (Semi-) Definitheit, Trägheitssatz von Sylvester, Hauptunterdeterminanten, Hurwitz-Kriterium

---

Wir haben in LA I 26.3/25.9 gesehen, dass ein selbstadjungierter Endomorphismus f eines endl. dim. unitären Raums V eine ONB aus EVen besitzt, die sämtlich zu reellen EWen gehören. Die Vorzeichen der EWe spielen eine Rolle. Sei im folgenden V stets ein endl. dim. unitärer Raum mit S.P. $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2.1. Def. (Signatur): Sei f selbstadjungierter Endo des endl. dim. unitären Raums V. Weiter sei V_+ bzw. V_- bzw. V_0 der von allen Eigenvektoren zu positiven bzw. negativen Eigenwerten, bzw. zum EW $=0$, aufgespannte UVR.

(D.h. also
$$V_+ := L(\{v\in V;\ \exists\lambda>0: f(v)=\lambda v\}),$$
$$V_- := L(\{v\in V;\ \exists\lambda<0: f(v)=\lambda v\}),$$
$$V_0 := L(\{v\in V;\ f(v)=0\cdot v=0\}) = \ker f.\ )$$

$(V=V_0\oplus V_+\oplus V_-)$

Sei $k_+ := \dim V_+$, $k_- := \dim V_-$, $k_0 := \dim V_0$, wo $k_+ + k_- + k_0 = \dim V$. Dann heißt das Zahlentripel $(k_+, k_0, k_-)\in\mathbb{N}_0^3$ die Signatur von f.

Für eine selbstadjungierte Matrix $A=A^*\in\mathbb{C}^{n\times n}$ (wird mit dem Endo $x\mapsto Ax$) entsprechend die Signatur der Matrix A definiert.

2.2. Bsp.: $A=\begin{pmatrix}-2&0\\0&3\end{pmatrix}$ hat die Signatur $(\underset{\#\text{pos. EW}}{1}, \underset{\#\text{EW } 0}{0}, \underset{\#\text{neg. EW}}{1})$, $B=\begin{pmatrix}2&i\\-i&1\end{pmatrix}$ hat die Signatur $(\underset{\#\text{pos.}}{2},0,0)$, denn die EWe von B sind $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$, beide >0.

2.3. Bem.: Für selbstadjungiertes f gilt $\forall x\in V$:
$$\langle f(x),x\rangle \underset{\text{Def. Adj.}}{=} \langle x, f^*(x)\rangle \underset{f^*=f}{=} \langle x, f(x)\rangle = \overline{\langle f(x),x\rangle},\ \text{d.h. } \langle f(x),x\rangle\in\mathbb{R}.$$

Speziell für $x\in V_+\setminus\{0\}$ gilt $\langle f(x),x\rangle > 0$
für $x\in V_0$ gilt $\langle f(x),x\rangle = 0$
für $x\in V_-\setminus\{0\}$ gilt $\langle f(x),x\rangle < 0$

} leicht nachzurechnen...

Beh.: für $x \in V_+ \setminus \{0\}$ gilt $\langle f(x), x \rangle > 0$

Bew.: Seien $f(v_j) = \lambda_j v_j$ mit $\lambda_j > 0$,

und $x = \sum_j \alpha_j v_j$, nicht alle $\alpha_j = 0$. Dann:

$$\langle f(x), x \rangle = \langle f(\sum_j \alpha_j v_j), \sum_j \alpha_j v_j \rangle$$

$$= \langle \sum_j \alpha_j f(v_j), \sum_j \alpha_j v_j \rangle$$

$$= \langle \sum_j \alpha_j \lambda_j v_j, \sum_k \alpha_k v_k \rangle$$

$$= \sum_j \alpha_j \lambda_j \langle v_j, \sum_k \alpha_k v_k \rangle$$

$$= \sum_j \alpha_j \lambda_j \sum_k \overline{\alpha_k} \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{= \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}}$$

$$= \sum_j \alpha_j \lambda_j \overline{\alpha_j}$$

$$= \sum_j \underbrace{\alpha_j \overline{\alpha_j}}_{\substack{|\alpha_j|^2 \geq 0, \\ \text{nicht alle} = 0}} \cdot \underbrace{\lambda_j}_{> 0} > 0.$$

$\square$

2.4. **Def. (definit):** Sei $f\in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, $U\subseteq V$ ein UVR. Dann heißt

f auf U positiv definit $:\Leftrightarrow \forall x\in U\setminus\{0\}: \langle f(x),x\rangle > 0$,

f auf U negativ definit $:\Leftrightarrow \forall x\in U\setminus\{0\}: \langle f(x),x\rangle < 0$,

f auf U positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \forall x\in U\setminus\{0\}: \langle f(x),x\rangle \geq 0$,

f auf U negativ semidefinit $:\Leftrightarrow \forall x\in U\setminus\{0\}: \langle f(x),x\rangle \leq 0$.

Ist kein UVR U spezifiziert, ist $U=V$ gemeint.

2.5 **Bem.:** Das ganze wird entsprechend für selbstadjungierte Matrizen $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ definiert, etwa:

A positiv definit $:\Leftrightarrow \langle Ax,x\rangle > 0$ für alle $x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$, wo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-S.P.

Ist A positiv definit, wird mit $\langle x,y\rangle_A := \langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle = \langle x,Ay\rangle$

also eine positiv definite hermitesche Form, also ein S.P. definiert, vgl. LA I 22.18.

2.6 **Bem.:** Auf V_+ bzw. V_- ist f positiv bzw. negativ definit,

auf $V_+ + V_0$ bzw. $V_- + V_0$ ist f positiv bzw. negativ semidefinit.

Diese UVRe sind auch maximal unter dieser Bedingung:

2.7. **Satz:** Sei U ein UVR von V, $f\in\mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert.

Ist f positiv/negativ definit auf U, so ist $\dim U\leq k_+$ / $\dim U\leq k_-$

Ist f positiv/negativ semidefinit auf U, so ist $\dim U\leq k_+ + k_0$ / $\dim U\leq k_- + k_0$.

Bew.: Sei f pos. def. auf U, dann ist $\forall x\in U\setminus\{0\}: \langle f(x),x\rangle > 0$.

Ist $x\in V_- + V_0$, so ist $\langle f(x),x\rangle\leq 0$. Dann ist $U\cap(V_- + V_0)=\{0\}$,

somit $k_+ + k_0 + k_- = \dim V \geq \dim(U+V_0+V_-) = \dim U + \dim V_0 + \dim V_-$

$= \dim U + k_0 + k_-$, also $\dim U \leq k_+$. Analog die anderen Aussagen. □

2.8 **Trägheitssatz von Sylvester:** Ist $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungiert und

$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, so ist auch B^*AB selbstadjungiert,

und A und B^*AB haben dieselbe Signatur.

Bew.: Es ist $(B^*AB)^* = B^*A^*(B^*)^* = B^*AB$, d.h. B^*AB ist selbstadj.

Es seien (k_+,k_0,k_-) bzw. (k_+',k_0',k_-') die Signaturen von A bzw. B^*AB,

sowie V_+, V_0, V_- bzw. V_+', V_0', V_-' die entsprechenden UVRe in 2.1.

Dann haben wir für $x \in \widetilde{V_+'} \setminus \{0\}$: $0 < \langle B^* A B x, x \rangle = \langle A \underbrace{Bx}_{y}, \underbrace{Bx}_{y} \rangle$,
also auch A pos. def. auf $B V_+' := \{y ; \exists x \in V_+' : y = Bx\}$.
Nach 2.5 ist dann $\dim B V_+' \leq k_+$, und da B invertierbar,
ist $\dim B V_+' = \dim V_+'$, also folgt $k_+' \leq k_+$.
Nun ist $A = (B^{-1})^* \cdot (B^* A B) \cdot B^{-1}$, und derselbe Schluss wie eben zeigt $k_+ \leq k_+'$, also ist $\underline{k_+ = k_+'}$. Analog geht man für k_0, k_- vor. □

2.9. Bsp.: Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$, $A_2 := B^* A_1 B$ mit $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Dann ist $A_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -50 \end{pmatrix}$. Somit hat A_2 die EWe $25, -50$, also die Signatur $(1, 0, 1)$. Nach Satz 2.8 von Sylvester muss A_1 dieselbe Signatur haben.
Die EWe von A_1 sind die Nullstellen von $\det(A_1 - T I_2)$
$= \det \begin{pmatrix} 2-T & -6 \\ -6 & -7-T \end{pmatrix} = (2-T)(-7-T) - 36 = T^2 + 5T - 50 = (T-5)(T+10)$,
also 5 und -10. Diese EWe sind zwar verschieden von denen von A_2, aber mit derselben Vorzeichenverteilung, d.h. Signatur.

Wir geben nun als Anwendung des Satzes von Sylvester ein Kriterium für Definitheit.

2.10. Def.: Sei $A \in K^{m \times m}$ eine Matrix über K. Für $j = 1, \dots, m$ sei A_j die Matrix, die durch Streichen der letzten $m-j$ Zeilen und $m-j$ Spalten entsteht.
Dann nennt man $\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_m$ die Hauptunterdeterminanten von A.
Eine andere, übliche Bezeichnung ist Hauptminoren von A.

2.11. Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ hat die Hauptunterdet. $\det \underbrace{(1)}_{A_1} = 1$, $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{A_2} = 5 - 8 = -3$, $\det \underbrace{A}_{A_3} = 0$.

2.12. Satz (Hurwitz-Kriterium): Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ selbstadjungiert. Dann ist A genau dann positiv definit (auf ganz $\mathbb{C}^m$), wenn alle Hauptunterdeterminanten von A positiv sind.

Bsp.: H.A.-trafo: $A = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$

Signatur von A: $(1,1,0)$ $\leftarrow$ EWe: $0, 25$

EVen: $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$\rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ✓

$\rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ✓

kriegen ONB: $\left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Also: $\left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = 1$ ✓

Dann:

$B^* A B = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}} = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$ ✓

Signatur: $\underline{\underline{(1,1,0)}}$

Laut Hurwitz ist A nicht pos. def.,

also wird durch $\langle x, y \rangle_A = \langle x, Ay \rangle$ kein S.P. def.

<u>Bew.:</u> <u>„$\Rightarrow$"</u>: Ist A pos. def., so ist $V_+ = \mathbb{C}^m$, d.h. alle EWe sind >0.

$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m\end{pmatrix}$

Die Determinante von A ist das Produkt der EWe $\lambda_1,\dots,\lambda_m$. [Denn nach <u>LA I 26.2</u> ist $A = X^{-1}\Lambda X$ mit $\underline{\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m)}$, also $\det A = \det(X^{-1}\Lambda X) = \underline{\det\Lambda} = \lambda_1\cdots\lambda_m$.]

Also folgt $\underline{\det A > 0}$ (*). Betr. die Untermatrix $\hat A = A_{m-1}$, die durch Streichen der letzten Zeile und letzten Spalte entsteht, so dass $A = \left(\begin{array}{c|c}\hat A & c\\ \hline c^* & \gamma\end{array}\right)$ mit $\gamma\in\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}^{m-1}$.
Wir schreiben jetzt $x = \begin{pmatrix}\hat x\\ \xi_m\end{pmatrix}$ mit $\hat x\in\mathbb{C}^{m-1}$.

Da für alle $x\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}$ die Ungl. $\langle Ax,x\rangle>0$ gilt, gilt dies auch für die x mit $\xi_m=0$, $\hat x\neq 0$, dafür ist $\langle Ax,x\rangle = \langle\hat A\hat x,\hat x\rangle$.

Mit A ist auch $\hat A$ selbstadj., also ist $\hat A$ pos. def. (auf ganz $\mathbb{C}^{m-1}$), und daher $\det\hat A>0$ (nach (*) für $\hat A$ angewendet).

Streichen wir symmetrisch eine andere Zeile und Spalte, kann genauso vorgegangen werden. Also gilt per Induktion, dass <u>alle</u> Hauptunterdeterminanten >0 sind.

<u>„$\Leftarrow$"</u>: Sei $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$ selbstadjungiert und alle Hauptunterdeterminanten >0.
Mit Induktion nach m zeigen wir, dass A positiv definit ist:

<u>$m=1$:</u> $A=(\alpha)$, $\det A>0 \Rightarrow \alpha>0$: Für $\xi\neq 0$ ist dann $\langle Ax,x\rangle = \alpha\xi\cdot\bar\xi = \alpha|\xi|^2>0$.

<u>$m-1 \rightsquigarrow m$:</u> Wie eben schreiben wir $A = \left(\begin{array}{c|c}\hat A & c\\ \hline c^* & \gamma\end{array}\right)$. Die Hauptunterdeterminanten von $\hat A$ sind auch solche von A,
somit alle >0 und daher $\hat A$ pos. def. nach Induktionsvoraussetzung.
Ferner ist $\det\hat A>0$, also ex. $z\in\mathbb{C}^{m-1}$ mit $\hat A z = -c$ ($\hat A$ invertierbar).
Setzen $B := \left(\begin{array}{c|c} I_{m-1} & z\\ \hline 0^T & 1\end{array}\right)\in\mathbb{C}^m$, wo $\det B = 1$, also B invertierbar ist.
(Auch gilt $\det B^* = 1$.)

Nach dem <u>Satz 2.8</u> von Sylvester ist A genau dann pos. def., wenn B^*AB pos. def. ist. Nun gilt

$$\underline{B^*AB} = \left(\begin{array}{c|c}\hat A & 0\\ \hline 0^T & c^*z+\gamma\end{array}\right),$$

also ist $0<\det A = \underbrace{\det B^*}_{=1}\cdot\det A\cdot\underbrace{\det B}_{=1} = \det(B^*AB) = \underbrace{(\det\hat A)}_{>0}\cdot\underbrace{(c^*z+\gamma)}_{=:\alpha}$,

und da auch $\det\hat A>0$, folgt $\underline{\alpha := c^*z+\gamma>0}$.

Also hat B^*AB die Gestalt $\left(\begin{array}{c|c} \hat{A} & 0 \\ \hline 0^T & \alpha \end{array}\right)$ mit $\hat{A}$ pos. def. und $\alpha > 0$.

Nun ist für $x = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \xi_m \end{pmatrix}$: $B^*ABx = \begin{pmatrix} \hat{A}\hat{x} \\ \alpha \cdot \xi_m \end{pmatrix}$,

also $\langle B^*ABx, x\rangle = \langle \hat{A}\hat{x}, \hat{x}\rangle + \alpha|\xi_m|^2 > 0$ für $x \neq 0$, also ist B^*AB pos. def.,

nach Satz 2.8 von Sylvester also A pos. def. □

2.13 Kriterien für Definitheit: Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ selbstadjungiert (d.h. im Fall $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrisch). Dann gilt:

(a) A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle EWe > 0

(b) A positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle EWe ≥ 0

(c) A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle EWe < 0

(d) A negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ alle EWe ≤ 0

(e) A indefinit (d.h. weder positiv noch negativ semidefinit)
$\Leftrightarrow$ A besitzt positive und negative EWe

Bew.: Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation LAI 26.2 ist $A = X^{-1}\Lambda X$ mit $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, wo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die EWe von A sind, und X unitär. Die verschiedenen Definitheiten von A sind dieselben wie die von Λ laut Satz 2.8 von Sylvester. Das Hurwitzkriterium 2.12 übersetzt die Aussagen über Definitheit über Aussagen über das Vorzeichen der EWe wie angegeben. □