Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§1: Bilinearformen

l3: Quadriken

Stichworte: Quadrik = Fläche 2-ten Grades im $\mathbb{R}^n$, quadratische Form, Elimination der gemischten Terme mit Hauptachsentrafo, Kegelschnitte, Quadriken im $\mathbb{R}^3$, Matrix einer Bilinearform

---

Die bisherigen Überlegungen zu Bilinearformen haben die folgende geometrische Anwendung. Die allgemeine Gleichung einer Fläche 2-ten Grades im $\mathbb{R}^n$ lautet

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\xi_i^2 + \underset{(\xi_i\xi_j=\xi_j\xi_i)}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j + \underset{\text{aus praktischen Gründen}}{2}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi_i + \gamma = 0, \quad \text{die } \alpha_{ij}, \xi_i, \gamma \in \mathbb{R},$$

d.h. sie wird durch ein Polynom vom Grad 2 in den "Unbestimmten" $\xi_1, \dots, \xi_n$ beschrieben. Wenn wir $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ und $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ schreiben, sowie $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, so können wir die Glg. kompakt schreiben:

3.1 **Def.:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, so heißt

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x^TAx + 2b^Tx + \gamma = 0\}$$ eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$.

In der Quadrikenglg. heißt

$x^TAx = \langle x, Ax\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}\xi_i^2 + \sum_{i<j} 2\alpha_{ij}\xi_i\xi_j$ quadratische Form von Q (Terme vom Grad 2)

$2b^Tx = 2\langle b, x\rangle = 2\sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi_i$ Linearform von Q (Terme vom Grad 1)

γ die Konstante von Q. (Term vom Grad 0)

3.2. **Bem.:** Haben $\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = x^TAx$, da A symmetrisch. $\to b(x,y) = \langle x, Ay\rangle$ ist Bilinearform

Somit: $Q = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, Ax\rangle + 2\langle b, x\rangle + \gamma = 0\}$

3.3. **Bsp.:**
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\gamma = 7$, lautet die Quadrikenglg. explizit
$1\cdot\xi_1^2 + 3\cdot\xi_2^2 + 2\cdot 5\cdot\xi_1\xi_2 + 4\xi_1 + 5\xi_2 + 7 = 0$, ist also nicht linear, sondern "quadratisch".
Die zugehörige "Fläche" $Q = \{\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ 1\cdot\xi_1^2 + 3\cdot\xi_2^2 + 2\cdot5\cdot\xi_1\xi_2 + 4\xi_1 + 5\xi_2 + 7 = 0\}$ in $\mathbb{R}^2$ stellt irgendeine "krumme Linie" dar, also eine "Kurve" im $\mathbb{R}^2$.
Schreibt man x für ξ_1 und y für ξ_2, um die Koordinatenachsenrichtungen in x-Richtung und y-Richtung zu bezeichnen, hat man $Q = \{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ \underbrace{x^2 + 3y^2 + 10xy}_{\text{Grad } 2} + \underbrace{4x + 5y}_{\text{Grad } 1} + \underbrace{7}_{\text{Grad } 0} = 0\}$.
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = 0$, $\gamma = -1$, hat man
$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^2;\ x^TAx + 2b^Tx + \gamma = 0\} = \{\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1\}$, den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$.

3.4 **Bem.:** • Bei der analogen Konstruktion im $\mathbb{R}^3$ würde man eher von "Fläche" sprechen; aber nicht immer, es gibt "ausgeartete Fälle", z.B. isolierte Punkte oder Geraden.
• Pathologisches Bsp.: $n=1$: $\alpha_{11}\xi_1^2 + 2\beta\xi_1 + \gamma = 0$ im $\mathbb{R}^1$ beschreibt 0, 1 oder 2 Punkte...

3.5 **Ziel:** Wollen alle Quadriken klassifizieren, um zu sehen, wie diese geometrisch aussehen.

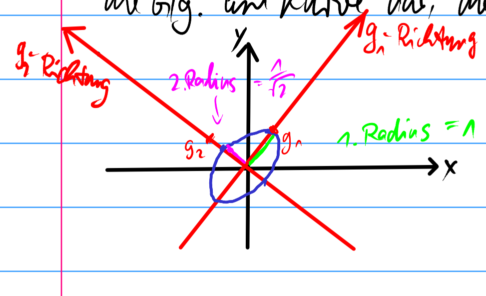
3.6 **Vorgehen:** 1. Da A symmetrisch ist, kann A mit dem Satz 1.13 = L26.3 / LA I (über die Hauptachsentrafo symmetrischer Matrizen) mit einer orthogonalen Matrix G, d.h. $G^* = G^{-1}$, auf Diagonalform gebracht werden, d.h. $\Lambda := G^* A G$ mit $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$.

$G^* = \bar{G}^T = G^T$, da G reell

2. Wählen wir nun als neues Koordinatensystem gerade die durch die Spalten von G gegebene ONB in $\mathbb{R}^n$, so erhält jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bzgl. dieser ONB die Darstellung $x' = G^{-1}x = G^* x$ bzw. $x = Gx'$.

Damit wird die Glg. $\langle Ax, x\rangle + 2\langle b, x\rangle + \gamma = 0$ umgeformt zu
$$0 = \langle AGx', Gx'\rangle + 2\langle b, Gx'\rangle + \gamma = \langle G^*AGx', x'\rangle + 2\langle G^*b, x'\rangle + \gamma$$
$$= \langle \Lambda x', x'\rangle + 2\langle G^* b, x'\rangle + \gamma,$$
d.h. mit $c := G^* b$ wird die Glg. zu $\langle \Lambda x', x'\rangle + 2\langle c, x'\rangle + \gamma = 0$, also wieder eine Quadrikenglg. wie eben. Allerdings hat Λ jetzt Diagonalform, so dass der 2-Term mit den "gemischten" Produkten $\xi_i \xi_j$, $i \neq j$, darin verschwunden ist. Die Glg. mit Λ ist wesentlich einfacher als vorher mit A!

Bsp.: Die Glg. $41\xi_1^2 - 24\xi_1\xi_2 + 34\xi_2^2 = 25$ hat $A = \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}$, $b = 0$, $\gamma = -25$. Die EWe von A sind 25, 50, zugeh. EVen sind $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $G = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ liefert $G^*AG = G^{-1}AG = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 25\xi_1'^2 + 50\xi_2'^2 = 25$,
also $\xi_1'^2 + 2\xi_2'^2 = 1$ ist die Gleichung der Kurve in den neuen Koordinaten $x' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix}$.
Die Koordinatenachsen $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Standardbasen wurden dabei (mit G) gedreht auf das neue Koo-system, gegeben durch die ONB $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ (den Spalten von G). Dort stellt die Glg. eine Kurve dar, die wir sofort als Ellipse mit den Halbachsen/Radien 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ erkennen:



Die Glg., geschrieben als $x^2 + \left(\frac{y}{1/\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ zeigt, dass $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ die Schnittpunkte der Kurve mit den neuen Koordinatenachsen ist.
Super hier: Kein Linearterm, da $b = 0$.

3. Als nächstes versuchen wir, auch den linearen Term (falls $b \neq 0$) durch eine Translation der Form $x' = x'' - x_0$ zu beseitigen. Dies liefert:

$$0 = \langle \Lambda(x''-x_0), x''-x_0 \rangle + 2\langle c, x''-x_0\rangle + \gamma$$

$$= \langle \Lambda x'', x''\rangle - \left(\underline{\langle \Lambda x_0, x''\rangle} + \underline{\langle \Lambda x'', x_0\rangle} - 2\langle c, x''\rangle \right) + \left(\langle \Lambda x_0, x_0\rangle - 2\langle c, x_0\rangle + \gamma \right),$$

und da Λ symmetrisch ist, ist $\langle \Lambda x'', x_0\rangle = \langle x'', \Lambda x_0\rangle = \langle \Lambda x_0, x''\rangle$,

und wir erhalten mit $\gamma' := \langle \Lambda x_0, x_0\rangle - 2\langle c, x_0\rangle + \gamma$ also die Glg.

$$0 = \langle \Lambda x'', x''\rangle - 2\langle \underbrace{\Lambda x_0 - c}_{\overset{!}{=}0,\ \text{falls } c \in \operatorname{im}(\Lambda),\ \text{was aber nicht notwendig gilt!}}, x''\rangle + \gamma'$$

Das bedeutet: unter Umständen ist der lineare Term entfernbar, i.a. jedoch nicht!

4. Wir können aber folgendes erreichen: Die Signatur von A bzw. Λ sei

s=# pos.EWe
t=#neg.EWe

$(k_+, k_0, k_-) =: (s, n-(s+t), t)$.

Durch geeignetes (Um-)Numerieren schreiben wir

$$\Lambda = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & & \lambda_s \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} \lambda_{s+1} & & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_{s+t} \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \}\ s\text{ Zeilen} \\ \}\ t\text{ Zeilen} \\ \}\ n-(s+t)\text{ Zeilen} \end{array}$$

Damit ist nicht unbedingt $\Lambda x_0 = c = 0$ erreicht, aber sicher, dass die ersten $s+t$ Komponenten von c verschwinden:

Ergebnis: $\langle \Lambda x, x\rangle + 2\langle c, x\rangle + \gamma = 0$

mit $\Lambda = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_s}_{\text{EWe} > 0}, \underbrace{\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+t}}_{\text{EWe} < 0}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-(s+t)\text{ viele 0en}})$.

Damit ist $c = (\underbrace{0, \dots, 0}_{s+t\text{ viele 0en}}, \gamma_{s+t+1}, \dots, \gamma_n)^T$ mit gewissen $\gamma_{s+t+1}, \dots, \gamma_n, \gamma \in \mathbb{R}$.

5. Diese Glg. ist noch kompakter schreibbar wie folgt.

zusätzliche letzte Komponente $=1$ anhängen

Setze zu $x := (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ einen zugeh. Vektor $\hat{x} := (\xi_1, \dots, \xi_n, 1)^T$

sowie $F := \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & c \\ \hline c^T & \gamma \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, also

$$F = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{smallmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \lambda_{s+t} \end{smallmatrix} & 0 & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 0 & & \\ & \ddots & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \gamma_{s+t+1} \\ \vdots \\ \gamma_n \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & \gamma_{s+t+1} \cdots \gamma_n & \gamma \end{array} \right).$$

Dann ist die Quadrikenglg. als $\boxed{\langle F\hat{x}, \hat{x}\rangle = 0}$ schreibbar.

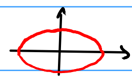
$$\circledast \quad \sum_{i=1}^{s+t} \lambda_i \xi_i^2 + 2\sum_{j=s+t+1}^{n} \gamma_j \xi_j + \gamma = 0$$

nicht dieselben Variablen, deren Quadrate in der Glg. stehen!

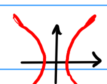
3.7. **Bem.:** Im Falle $c=0$ spricht man von einer Kurve/Fläche mit Zentrum, im Falle $c=0$ von einer Kurve/Fläche ohne Zentrum.

3.8. **Fall $n=2$:** Die nicht entarteten Kurven, die im $\mathbb{R}^2$ entstehen, heißen Kegelschnitte.
Unser Vorgehen 3.6 liefert folgende Fälle:

- $s=2$: Die Kurve hat ein Zentrum, also $c=0$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
  (*) lautet: $\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \gamma = 0$, nach Multiplikation mit $\frac{-\gamma}{\lambda_1\lambda_2}$ also

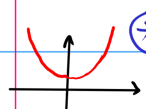


  $\frac{-\gamma}{\lambda_2}\xi_1^2 + \frac{-\gamma}{\lambda_1}\xi_2^2 = \frac{\gamma^2}{\lambda_1\lambda_2}$ (deutlicher: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \rightsquigarrow$ Radien $A, B > 0$)
  Für $\gamma > 0$ ist dies unlösbar. Für $\gamma = 0$ ist dies ein Punkt.
  Für $\gamma < 0$ ist es die Glg. einer Ellipse mit den Halbachsen/Radien $\sqrt{\left|\frac{\gamma}{\lambda_1}\right|}, \sqrt{\left|\frac{\gamma}{\lambda_2}\right|}$.
  Für $\lambda_1 = \lambda_2$ gehört hierzu auch der Kreis.
- $s=1, t=1$: Die Kurve hat ein Zentrum, also $c=0$ und etwa $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.
  (*) lautet: $|\lambda_1|\xi_1^2 - |\lambda_2|\xi_2^2 + \gamma = 0$,



  dies liefert für $\gamma \neq 0$ (analog zu $s=1$) eine Hyperbel.
  (deutlicher: $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1 \to$ Hyperbelglg.!)

  Bem.: Ja, das ist eine Hyperbel im üblichen Sinne, z.B. $\xi_1^2 - \xi_2^2 = 1$ ist die Standardhyperbel ($y = \pm\frac{1}{x}$), nur gedreht um $\frac{\pi}{4}$: Drehen das Koordinatensystem in die neue ONB $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-1}{1}\right)$, also $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x'$, also $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1' + \xi_2')$ und $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1' - \xi_2')$. Aus $\xi_1^2 - \xi_2^2 = 1$ wird $\frac{1}{2}(\xi_1' + \xi_2')^2 - \frac{1}{2}(\xi_1' - \xi_2')^2 = 1 \Leftrightarrow \xi_1'\xi_2' = \pm 1$.
- $s=1, t=0$: Dann ist $c = \binom{0}{\gamma_2}$, mit $\gamma_2 \neq 0$ hat die Kurve kein Zentrum.



  (*) lautet: $\lambda_1 \xi_1^2 + 2\gamma_2 \xi_2 + \gamma = 0$, dies ist eine Parabel.
  (Deutlicher: $y = Ax^2 + B$)
- Die anderen Fälle liefern entweder schon hier aufgeführte Kurven oder entartete Fälle (einzelne Punkte, Geraden usw.).

3.9. Warum Kegelschnitte so heißen: Im $\mathbb{R}^3$ beschreibt die Glg. $x^2 + y^2 = \delta \cdot (z - z_0)^2$ einen Kreisdoppelkegel um die z-Achse mit "Taille" im Punkt $(0,0,z_0)$. (Für $\delta = \frac{R}{z_0^2}$, $z_0 \to \infty$, gibt dies im Grenzfall den Kreiszylinder mit Radius R um die z-Achse.) Wir schneiden den Kegel mit einer Ebenen $ax + by + cz = d$, für $c \neq 0$ lösen wir nach z auf und können z aus der Ebenen-/Kegel-glg. eliminieren. Diese Schnittgebilde (also im $\mathbb{R}^2$) sind genau die aus 3.8.

3.10 Fall $n=3$: Wir erhalten die folgenden Typen von Quadriken im $\mathbb{R}^3$ (also Flächen 2-ten Grades).

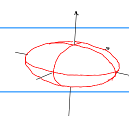
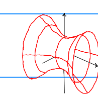
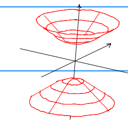
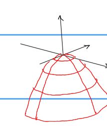
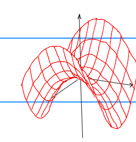
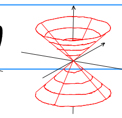
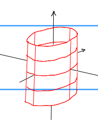
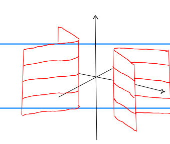
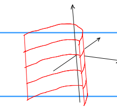
- $s=3$: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, die Fläche hat ein Zentrum,

  $(*)$ lautet: $\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \gamma = 0$.

  Unlösbar für $\gamma > 0$, ein Punkt für $\gamma = 0$. Für $\gamma < 0$ ist dies die Glg. eines Ellipsoids. Sind zwei EWe gleich, ist das ein Rotationsellipsoid, sind alle drei EWe gleich, ist das eine Kugel.

  Ein Ellipsoid ist ein beschränktes Gebilde, und der Schnitt mit jeder Ebenen, die zu einer Koordinatenebenen parallel ist, ergibt eine Ellipse (oder ist leer).

- Die wichtigsten Fälle, geg. als $\langle F\hat{x}, \hat{x}\rangle = 0$, gemäß Vorzeichen in F nach geeigneter Normierung (die μ_i bezeichnen positive Zahlen), sind wie folgt gegeben.

Vorzeichen in F	Glg.	Name	Bildchen
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&+&&\\&&+&\\&&&+\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2+\mu_2\xi_2^2+\mu_3\xi_3^2+1=0$	– (leere Menge)	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&+&&\\&&+&\\&&&-\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2+\mu_2\xi_2^2+\mu_3\xi_3^2-1=0$	Ellipsoid, s.o.	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&-&&\\&&-&\\&&&+\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}+&&&\\&+&&\\&&-&\\&&&-\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2+\mu_2\xi_2^2-\mu_3\xi_3^2-1=0$	einschaliges Hyperboloid	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&+&&\\&&-&\\&&&+\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}+&&&\\&-&&\\&&-&\\&&&-\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2-\mu_2\xi_2^2-\mu_3\xi_3^2-1=0$	zweischaliges Hyperboloid	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&+&&\\&&0&-\\&&-&0\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2+\mu_2\xi_2^2=2\xi_3$	elliptisches Paraboloid	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&-&&\\&&0&-\\&&-&0\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2-\mu_2\xi_2^2=2\xi_3$	hyperbolisches Paraboloid	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&+&&\\&&-&\\&&&0\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}+&&&\\&-&&\\&&-&\\&&&0\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2+\mu_2\xi_2^2=\mu_3\xi_3^2$	elliptischer Doppelkegel	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&+&&\\&&0&\\&&&-\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2+\mu_2\xi_2^2=1$	elliptischer Zylinder	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&-&&\\&&0&\\&&&-\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}+&&&\\&-&&\\&&0&\\&&&+\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2-\mu_2\xi_2^2=1$	hyperbolischer Zylinder	
$F = \begin{pmatrix}+&&&\\&0&&-\\&&0&\\&-&&0\end{pmatrix}$	$\mu_1\xi_1^2=2\xi_2$	parabolischer Zylinder	

3.11 Rechenbeispiel: (Schreiben hier einfacher x_1 für ξ_1, x_2 für ξ_2, x_3 für ξ_3)

im $\mathbb{R}^3$ sei Q geg. durch:

$$8x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2+\underline{54x_1}+\underline{\underline{72}}=0$$

Wollen Normalform/Typ von Q bestimmen.

Gehen vor wie folgt.

Glg. in Matrixschreibweise: $x^TAx+2b^Tx+\gamma=0$

mit

$$A=\begin{pmatrix}8&2&2\\2&5&-4\\2&-4&5\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}27\\0\\0\end{pmatrix},\quad \gamma=72.$$

1. Berechne charakteristisches Polynom: $\chi_A(T)=-T(9-T)^2$, die EWe sind $\lambda_1=\lambda_2=9$, $\lambda_3=0$
2. In den Eigenräumen E_{λ_1}, E_{λ_3} bestimmen wir jeweils eine ONB. Für E_{λ_1} bilden die Vektoren $v=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\tilde{v}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ eine ONB,

   in E_{λ_3} ist der Vektor $w=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ eine ONB.
3. Dann ist $S=(v|\tilde{v}|w)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix,

   die A auf Diagonalgestalt transformiert (die "Hauptachsentransformation"), diese Transformation beseitigt die gemischten quadratischen Terme: In den neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3, die mit den alten x_1, x_2, x_3 durch $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$, $x_2=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$, $x_3=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$ verbunden ist, hat Q somit die Glg. $9(y_1^2+y_2^2+4y_1+4y_2-2y_3+8)=0$.
4. Mit Hilfe der Translation $z_1=y_1+2$, $z_2=y_2+2$, $z_3=y_3$, welche den konstanten Term beseitigt,

   erhalten wir die Normalform von Q als $\underline{\underline{z_1^2+z_2^2=2z_3}}$.

   Q ist also ein <u>elliptisches Paraboloid</u>.

3.12. Bem.: Die Art der Matrix A der Glg. der Quadrik bestimmt den Typ:

- A positiv definit $\rightsquigarrow$ Q Ellipsoid oder Punkt
- A indefinit und nichtausgeartet $\rightsquigarrow$ Kegel oder (ein-/zweischaliges) Hyperboloid
- A indefinit und ausgeartet $\rightsquigarrow$ hyperbolisches Paraboloid
- A positiv semidefinit $\rightsquigarrow$ elliptisches Paraboloid

Dabei heißt A ausgeartet, wenn $b(x,y) = \langle x, Ay\rangle$ eine ausgeartete Bilinearform ist.
Eine symmetrische (oder antisymm.) Bilinearform $b: V\times V \to K$ heißt nichtausgeartet, wenn

$$\forall x\in V: (\forall y\in V: b(x,y)=0) \Rightarrow x=0.$$

3.13. Abschließende Bemerkung zum Thema "Bilinearformen": Wir haben mit $\forall x,y\in K$: $b(x,y) := \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$ zu einer symmetrischen Matrix $A\in K^{n\times n}$ eine symmetrische Bilinearform b erhalten, die für pos. definites A ein Skalarprodukt liefert.
Umgekehrt erhält man aus einer Bilinearform $b: K^n\times K^n \to K$ eine zugehörige Matrix A, für die $b(x,y) = \langle x, Ay\rangle$ gilt für alle $x,y\in K^n$, wenn man für die Einheitsvektoren $e_1,\dots,e_n$ des K^n die Matrix von b als $A := (b(e_i,e_j))_{i,j}$ definiert; denn wir haben $\alpha_{ij} = \langle e_i, \underbrace{Ae_j}_{j\text{-te Spalte von } A}\rangle = b(e_i,e_j)$ für die Einträge α_{ij} der Matrix $A = (\alpha_{ij})_{ij}$.

⌈Für $K=\mathbb{C}$ sei b eine Sesquilinearform. Dann ist b hermitesch $\Leftrightarrow$ A selbstadjungiert.⌋

Eine Vereinfachung der Matrix (und damit der Bilinearform) geschieht durch Basiswechsel, speziell wenn man als Basis die ONB der Hauptachsentransformation von A nimmt, wie wir gesehen haben. Für Quadrikengleichungen, in denen zunächst $x^T Ax = \langle x, Ax\rangle = b(x,x)$ steht, bedeutet dies eine Elimination der gemischten quadratischen Terme.