l4

- 1 -

Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§1: Bilinearformen

l4: Die orthogonale Gruppe

Stichworte: orthogonale Gruppe $O(n)$, spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$, Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$, Erzeugung von $O(n)$ bzw. $SO(n)$ mit Spiegelungen, $O(V)$ und Isometrien

---

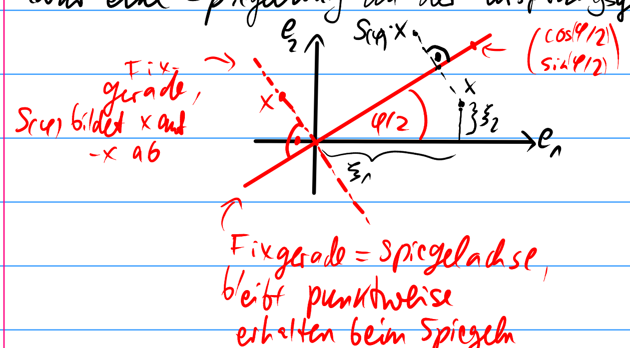
In L23, LAI, haben wir zweidimensionale Drehmatrizen behandelt.
In L26, LAI, hatten wir den Hauptachsentrafosatz für orthogonale Matrizen L26.10.
Wir wollen dies hier wiederholen/vertiefen und Zusammenhänge mit Spiegelungen studieren. Die Orientierung der ONBen, die durch die Spalten solcher Matrizen gegeben sind, ist wesentlich und wird dabei mituntersucht.
Die Gesamtheit aller Drehungen und Spiegelungen trägt mit der Komposition "$\circ$" von Abbildungen eine Gruppenstruktur und wird orthogonale Gruppe genannt.
Wir studieren erst den Fall im $\mathbb{R}^2$, dann $\mathbb{R}^n$ und den allgemeinen Fall, sowie $\mathbb{R}^3$.

Die orthogonale Gruppe $O(2)$ im $\mathbb{R}^2$

Zur Drehmatrix $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die die Einheitsvektoren $e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}$ auf die ONB $\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}, \binom{-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ abbildet, vgl. LAI, L23.8, definieren wir die Matrix

$$S(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = R(\varphi) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung an } \xi_1\text{-Achse (bzw. x-Achse)}}.$$

Diese bewirkt eine Spiegelung, und zwar eine Spiegelung an der Ursprungsgeraden, die mit der ξ-Achse den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ einschließt.



⌜ folgt aus untigem, Bem. zu 4.7. ⌟

4.2. <u>Kombinationen</u> von Spiegelungen und Drehungen im $\mathbb{R}^2$:

Für die Drehmatrizen $R(\varphi)$ und Spiegelmatrizen $S(\varphi)$ verifizieren wir mit den Additionstheoremen:

(1) $R(\varphi)\cdot R(\psi) = R(\varphi+\psi)$, d.h. erst Drehung um ψ, dann Drehung um φ, ergibt insgesamt eine Drehung um $\varphi+\psi$,

(2) $S(\varphi)\cdot S(\psi) = R(\varphi-\psi)$, d.h. erst Spiegelung um ψ, dann Spiegelung um φ, ergibt insgesamt eine Drehung um $\varphi-\psi$,

(3) $R(\varphi)\cdot S(\psi) = S(\varphi+\psi)$, d.h. erst Spiegelung um ψ, dann Drehung um φ, ergibt insgesamt eine Spiegelung um $\varphi+\psi$,

(4) $S(\psi)\cdot R(\varphi) = S(\psi-\varphi)$, d.h. erst Drehung um φ, dann Spiegelung um ψ, ergibt insgesamt eine Spiegelung um $\psi-\varphi$.

<u>Bew. für (2):</u>

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos(-\psi)-\sin\varphi\sin(-\psi) & -\cos\varphi\sin(-\psi)-\sin\varphi\cos(-\psi) \\ \sin\varphi\cos(-\psi)+\cos\varphi\sin(-\psi) & \sin\varphi\cos(-\psi)+\cos\varphi\cos(-\psi) \end{pmatrix} \overset{\text{Addthm.}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & -\sin(\varphi-\psi) \\ \sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) \end{pmatrix},$$

d.h. jede Drehung ist Produkt zweier Spiegelungen. (3) und (4) analog...

Damit sehen wir, dass Drehungen/Spiegelungen aus anderen zusammengesetzt werden können.

Weiter gilt: (5) $\det R(\varphi) = +1$, (6) $\det S(\varphi) = -1$,

und (7) $R(\varphi)^{-1} = R(-\varphi) = R(\varphi)^T$, d.h. die Umkehrung einer Drehung um φ ist eine Drehung um $-\varphi$,

(8) $S(\varphi)^{-1} = S(\varphi) = S(\varphi)^T$, d.h. die Umkehrung einer Spiegelung um φ ist die Spiegelung um φ, d.h. sie ist selbstinvers.

4.3. <u>Def.:</u> Sei $O^+(2) := \{R(\varphi);\ \varphi\in\mathbb{R}\} =: SO(2)$ und $O^-(2) := \{S(\varphi);\ \varphi\in\mathbb{R}\}$, ($\varphi\in[0,2\pi[$ reicht)

und $O(2) := O^+(2)\cup O^-(2) = SO(2)\cup O^-(2)$.

Dann ist $O(2) \subseteq GL(2) := \{A\in\mathbb{R}^{2\times2};\ A \text{ invertierbar}\}$
$= \{A\in\mathbb{R}^{2\times 2};\ \det(A)\neq 0\}$.

Man schreibt auch $GL_2(\mathbb{R})$, um den Körper $\mathbb{R}$ mitzunennen; auch: $GL(2;\mathbb{R})$.

$GL(2)$ heißt <u>allgemeine Lineare Gruppe</u> im $\mathbb{R}^2$,

$O(2)$ heißt <u>orthogonale Gruppe</u> im $\mathbb{R}^2$,

$SO(2)$ heißt <u>spezielle orthogonale Gruppe</u> im $\mathbb{R}^2$.

4.3 **Satz:** (1) $GL(2)$ ist eine Gruppe bezüglich Matrizenmultiplikation.
(2) $O(2)$ ist eine Untergruppe von $GL(2)$.
(3) $SO(2)$ ist eine abelsche (d.h. kommutative) Untergruppe von $O(2)$.
(4) $SO(2) = O^+(2) \longrightarrow O^-(2)$, $R(\varphi) \to R(\varphi)S(\psi)$ ist für jedes $\psi \neq 0$ eine Bijektion.
(5) $SO(2) \cong S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$, $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$.

Bem.: Eine Untergruppe U einer Gruppe G ist eine Teilmenge, die selbst wieder Gruppe bzgl. der Gruppenverknüpfung von G ist und auch das neutrale Element von G als neutrales Element in U besitzt. D.h. U ist UG von G, falls $e_G \in U$, $\forall x,y \in U: xy,\ x^{-1} \in U$.

Bew.: Zu (1): Assoziativität: ✓, gilt für alle Matrizen,
Neutrales El. ist $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Inverses von $A \in GL(2)$ ex. laut Def. ✓
Zu (2): Mit $A,B \in O(2)$ ist $A \cdot B \in O(2)$ und $A^{-1} \in O(2)$ wegen 4.2. (1)-(4), (7), (8),
Zu (3): Mit $A,B \in SO(2)$ ist $A \cdot B \in SO(2)$ und $A^{-1} \in SO(2)$ wegen 4.2. (1), (7).
Kommutativität: $A \cdot B = R(\varphi)\cdot R(\psi) = R(\varphi+\psi) = R(\psi+\varphi) = R(\psi)\cdot R(\varphi) = B \cdot A$.
Zu (4): Klar, da $S(\psi)$ invertierbar.
Zu (5): Die Isomorphie zum Einheitskreis (als Gruppenisomorphie) ist auch klar.
(Vgl. dazu auch "Winkel im Kreismodell", LA I, L23.4.) □

4.4 **Satz:** Die orthogonale Gruppe besteht aus genau allen orthogonalen Matrizen,
d.h. $O(2) = \{A \in GL(2);\ A^T = A^{-1}\}$.

Bew.: „$\subseteq$" klar, zu „$\supseteq$": Laut LA I, L25.8, bilden die Spalten a,b einer orthogonalen Matrix $A = (a|b)$ eine ONB, also $\|a\| = \|b\| = 1$ und $\langle a,b \rangle = 0$. Die Zahl α_{11} in $a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$ ist $\in [-1,1]$. Nun hat $a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$ die Form $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi := \cos^{-1}(\alpha_{11})$, man kann $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \pm\sin\varphi \\ \sin\varphi & \mp\cos\varphi \end{pmatrix}$ ansetzen, denn zu $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ sind $\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ orthogonal. Also ist $A = R(\varphi)$ oder $A = S(\varphi)$. □

4.5 **Bem.:** Wir haben die orthogonalen Matrizen in LA I, 26.6, charakterisiert, so dass gilt:
$$O(2) = \{A \in GL(2);\ \forall x,y \in \mathbb{R}^2: \langle x,y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle\} \quad (A \text{ winkeltreu}),$$
$$= \{A \in GL(2);\ \forall x \in \mathbb{R}^2: \|x\| = \|Ax\|\} \quad (A \text{ isometrisch/längentreu}).$$

Damit bildet $A \in O(2)$ jedes Vektorenpaar x,y, das einen Winkel φ zwischen x und y einschließt, auf Ax, Ay ab, die denselben Winkel einschließen. Weiter hat jedes Ax dieselbe Länge wie x.

4.6 **Bem.:** Wir erhalten $O^+(2) = SO(2) = \{A \in O(2);\ \det(A) = +1\}$,
$O^-(2) = \{A \in O(2);\ \det(A) = -1\}$.

⌈Denn $O^+(2)$ besteht aus den Drehungen mit $\det = +1$, und $O^-(2) = \{\underbrace{R(\varphi)S(\tfrac{\pi}{2})}_{\det=-1};\ \varphi \in \mathbb{R}\}$ laut 4.3(4).⌋
In der Sprache der Gruppentheorie ist $\det : O(2) \to \{\pm 1\}$ ein Epimorphismus der Gruppen, und der Kern $O^+(2) = SO(2)$ ist ein Normalteiler vom Index 2.

4.7 **Def.:** Eine Fixgerade von $A \in O^+(2)$ ist eine Gerade $\mathbb{R}u = L(u)$, $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, durch 0, für die $Au = \lambda u$ gilt (also durch A auf sich abgebildet wird).

Bem.: (i) Mit $A = R(\varphi)$ folgt $R(\varphi)u = \lambda u \iff R(\varphi) = \pm I_2$, $\lambda = \pm 1$, also $\varphi \in m \cdot \pi$, $m \in \mathbb{Z}$.
(ii) Mit $A = S(\varphi)$ folgt $S(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix}$, $S(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos((\varphi+\pi)/2) \\ \sin((\varphi+\pi)/2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos((\varphi+\pi)/2) \\ \sin((\varphi+\pi)/2) \end{pmatrix}$,
damit hat jede Spiegelung zwei orthogonale Fix-Geraden, von denen die eine punktweise fest bleibt: Die erste ist $L\left(\begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}\right)$, die zweite $L\left(\begin{pmatrix} \cos((\varphi+\pi)/2) \\ \sin((\varphi+\pi)/2) \end{pmatrix}\right)$.

⌈Haben nach 4.2(4) die Glg. $S(\psi) \cdot R(\varphi) = S(\psi - \varphi)$, also $S(\varphi) \cdot R(\tfrac{\varphi}{2}) = S(\tfrac{\varphi}{2})$,
also $S(\varphi) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix}}_{\text{erste Spalte von } R(\frac{\varphi}{2})} = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$ = erste Spalte von $S(\tfrac{\varphi}{2})$. Analog ist die 2. Glg. richtig, da $S(\varphi) \cdot R\left(\tfrac{\varphi+\pi}{2}\right) = S\left(\tfrac{\varphi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\right)$, also erste Spalte davon: $S(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos((\varphi+\pi)/2) \\ \sin((\varphi+\pi)/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2 - \pi/2) \\ \sin(\varphi/2 - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi/2 + \pi/2) \\ -\sin(\varphi/2 + \pi/2) \end{pmatrix}$, da $\cos(\alpha+\pi) = \cos(\alpha)\cos(\pi) = -\cos\alpha$, $\sin(\alpha+\pi) = \sin(\alpha)\cos(\pi) = -\sin\alpha$.⌋

Die orthogonale Gruppe $O(n)$ im $\mathbb{R}^n$

4.8 **Def.:** Wie im Vorbild $O(2)$ definieren wir auch die folgenden Matrixgruppen.
Orthogonale Gruppe: $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ A^T = A^{-1}\} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ \forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| = \|x\|\}$.
Spezielle orthogonale Gruppe: $SO(n) := O^+(n) := \{A \in O(n);\ \det A = 1\}$,
analog $O^-(n) := \{A \in O(n);\ \det A = -1\}$ (keine Gruppe!),
so dass wieder $O(n) = O^+(n) \cup O^-(n)$ gilt. Satz 4.3(1)-(4) gilt analog.
Wir können das Vorzeichen von $\det A$ auch als Orientierung von A ansehen, bzw. als Orientierung des Koordinatensystems, das durch die Spalten von A gegeben ist. Vgl. LA I, L23.13 für den Fall im $\mathbb{R}^3$. Im $\mathbb{R}^n$ kann es auch nur zwei Orientierungen geben, da für $A \in O(n)$ stets $\det A = \pm 1$ gilt nach LA I, L25.8.
Im $\mathbb{R}^2$ sind die Spiegelungen genau die orthogonalen Abbildungen mit negativer Determinante, und das ist auch im $\mathbb{R}^n$ so, wie wir gleich sehen werden.
Dazu überlegen wir uns, wie man allgemein Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$ beschreiben kann.

4.9. **Def.: Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$:** Für $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die $n \times n$-Spiegelungsmatrix durch $S_a := I_n - \frac{2}{\langle a,a\rangle} \cdot \underbrace{aa^T}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}}$.

Die Abb. $x \mapsto S_a x$ heißt Spiegelung. Führt man die zu a orthogonale Hyperebene $H_a := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a,x\rangle = 0\}$ ein, so ist $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto S_a x$, die Spiegelung an der Hyperebene H_a wie folgt.

4.10. **Satz:** Es gilt (1) $S_a^2 = I_n$, (2) $S_a^T = S_a$ $\left(\overset{(1)}{=} S_a^{-1}\text{, also } S_a \in O(n)\right)$, sowie (3) $\forall x \in L(a): S_a x = -x$, (4) $\forall x \in H_a : S_a x = x$

Bew.: (1): $S_a^2 = \left(I_n - \frac{2}{\langle a,a\rangle} aa^T\right)\cdot\left(I_n - \frac{2}{\langle a,a\rangle} aa^T\right) = I_n - \frac{4}{\langle a,a\rangle} aa^T + \underbrace{\frac{4}{\langle a,a\rangle^2} \cdot a \underbrace{a^T a}_{=\langle a,a\rangle} a^T}_{=\frac{4}{\langle a,a\rangle}\cdot aa^T} = I_n$.

(2): $S_a^T = I_n^T - \frac{2}{\langle a,a\rangle}\cdot (a^T)^T a^T = I_n - \frac{2}{\langle a,a\rangle} \cdot aa^T = S_a$,

(3): $S_a \mu a = \left(I_n - \frac{2}{\langle a,a\rangle} aa^T\right)\mu a = \mu a - \frac{2}{\langle a,a\rangle}\cdot aa^T \mu a = \mu a - 2\mu a \cdot \underbrace{\frac{a^T a}{\langle a,a\rangle}}_{=1} = -\mu a$ für $\mu \in \mathbb{R}$,

(4): $\langle a,x\rangle = 0 \Rightarrow S_a x = x - \frac{2}{\langle a,a\rangle} a \underbrace{a^T x}_{\langle a,x\rangle = 0} = x$. □

Laut 4.2(2) ist im $\mathbb{R}^2$ die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen eine Drehung. Dies verallgemeinern wir jetzt auf den $\mathbb{R}^n$. Dazu erst zwei Lemmas.

4.11. **Lemma:** Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = \|b\| = 1$ und $a \neq \pm b$. Dann hat der UVR $H := H_a \cap H_b$ des $\mathbb{R}^n$ die Dimension $\dim H = n-2$, und es gilt $\mathbb{R}^n = L(a) \oplus L(b) \oplus H$, $H^\perp = L(a) \oplus L(b)$.

Bew.: Ein $x \in H$ ist Lösung des LGS $a^T \cdot x = 0 \wedge b^T \cdot x = 0$, dessen Koeffizientenmatrix den Rang 2 hat, denn a und b sind linear unabhängig. Dann folgt $\dim H = n-2$ (laut Rangsatz). Ist nun $(c_1, \dots, c_{n-2})$ eine Basis von H, so sind $(a, b, c_1, \dots, c_{n-2})$ lin. unabh. weil a und b orthogonal zu allen $c_1, \dots, c_{n-2}$ sind. □

4.12 **Lemma:** Seien a, b wie in 4.11. Zu jedem $x \in L(a) \oplus L(b)$ folgt

$$\langle x, S_a S_b x\rangle = \langle x,x\rangle \cdot \left(2\langle a,b\rangle^2 - 1\right).$$

Bew.: Ü □

4.13 **Satz:** Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann ist das Produkt $S_a S_b$ der Spiegelungen S_a und S_b eine Drehung (in $L(a) \oplus L(b)$) um den Winkel $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\cos(\omega) = 2\left(\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)^2 - 1$, bei der der Unterraum $H_a \cap H_b$ elementweise fest bleibt.

~~Kor.: $S_a S_b = \pm S_b S_a$, es ist egal, in welcher Reihenfolge die beiden Spiegelungen durchgeführt werden~~. Und nach 4.11 gilt für den Fixraum $\dim H_a \cap H_b = n-2$.

Bew. von 4.13: Man darf OE $\|a\|=\|b\|=1$ annehmen. Nach Lemma 4.12 gilt für $R:=S_aS_b$ dann $\cos\sphericalangle(x,Rx)=\frac{\langle x,Rx\rangle}{\|x\|\cdot\underbrace{\|Rx\|}_{=\|x\|}}=\frac{\langle x,Rx\rangle}{\langle x,x\rangle}=2\langle a,b\rangle^2-1$ für jedes $x\in L(a)\oplus L(b)$, $x\neq 0$, richtig, d.h.
jedes $x\neq 0$ schließt mit Rx einen Winkel ein, der unabh. von x ist.
Damit ist die Abb. $x\mapsto Rx$, auf $L(a)\oplus L(b)$ eingeschränkt, eine Drehung um genau diesen Winkel. Nach Zurücknahme der Normierung $\|a\|=\|b\|=1$ folgt die Formel für ω. □

Unsere Überlegungen führen nun zur Erkenntnis, dass jede orthogonale Abbildung als ein Produkt (d.h. eine Hintereinanderausführung) von Spiegelungen dargestellt werden kann. Dies kann man direkt aus obigem neu beweisen; wir zeigen es jetzt aber mit unserem Hauptachsentransformationssatz für orthogonale Matrizen LA I, L 26.10, der noch genauere Aussagen hierzu macht.

4.14. **Satz:** (i) Jede orthogonale Matrix $A\in O(n)$ ist Produkt von $\leq n$ vielen Spiegelungen.
(ii) Eine Matrix $A\in O(n)$ ist Drehmatrix, d.h. $A\in SO(n)$, genau dann wenn A ein Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungsmatrizen ist.

Bew.: Laut H.A.trafo-Satz LA I, L 26.10, ist für eine Matrix $X=(x_1,\dots,x_n)\in O(n)$:

$$X^*AX=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}}_{\#\text{Spalten}=\dim E_1} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}}_{\#\text{Spalten}=\dim E_{-1}=:m} & \\ & & \left.\begin{matrix}R_1&&\\&\ddots&\\&&R_s\end{matrix}\right\} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

s viele 2×2-formatige Drehmatrizen $R_1,\dots,R_s$
↳ $2s$ Spiegelungen

Auf E_1, dem Eigenraum zum Eigenwert 1 (falls vorhanden), wirkt A wie die Identität, auf E_{-1}, dem Eigenraum zum Eigenwert -1 (falls vorhanden), wirkt A wie $-I_m$. Dies ist keineswegs eine Spiegelung wie in 4.9 definiert, aber Produkt von m Spiegelungen wie in 4.9 definiert: $-I_m=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&\ddots\\&&&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&\ddots\\&&&1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\\&&&-1\end{pmatrix}$; wir beachten, dass $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ die Spiegelung an der "x"-Achse ist.

Und auf weiteren 2-dim. Unterräumen (mit passenden x_j zu Paaren (a_i,b_i) gebildet) wirkt A wie eine Drehung (und nach 4.2.(2) je Produkt zweier Spiegelungen).
Diese Unterräume sind alle paarweise orthogonal zueinander (und die Lin.Hülle von bestimmten Vektoren von $x_1,\dots,x_n$). Also ist A die Hintereinanderausführung von Spiegelungen wie in 4.2.(2) definiert. Schätzen jetzt deren Anzahl $m+2s$ ab:

Es gilt $n = \dim E_1 + \dim E_{-1} + 2s$, die Anzahl der Spiegelungen insgesamt ist dann $m + 2s \leq n$. Dies zeigt (i).

Zu (ii): Wir haben $\det(A) = (-1)^m \cdot \det(R_1) \cdots \det(R_s) = (-1)^m$, dies zeigt „$\Rightarrow$":
$A \in SO(n) \Rightarrow \det(A) = 1 \Rightarrow m$ gerade $\Rightarrow m + 2s$ gerade.

Zu „$\Leftarrow$": Ist $A = S_{a_1} \cdots S_{a_{2k}}$ mit Spiegelungen zu $a_1, \ldots, a_{2k}$, so folgt $\det(A) = \det(S_{a_1}) \cdots \det(S_{a_{2k}}) = (-1)^{2k} = 1$, also $A \in SO(n)$. □

Die orthogonale Gruppe eines euklidischen Vektorraums

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4.15. **Def.:** Eine lineare Abb. $f: V \to V$ (d.h. $f \in End(V)$) heißt orthogonal, falls
$\forall x, y \in V: \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
Wir nennen $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \{ f \in End(V);\ f \text{ orthogonal} \}$ die orthogonale Gruppe von V.

4.16. **Satz:** (i) $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist bzgl. "$\circ$" eine Gruppe (eine UG von $GL(V) = \{ f \in End(V); \det f \neq 0 \}$).
(ii) $f \in O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \Rightarrow \forall x, y \in V: \| f(x) - f(y) \| = \| x - y \|$, d.h. f verändert Abstände nicht.

Bew.: (i): id_V ist orthogonal, und mit f, g sind auch $f \circ g$ und f^{-1} orthogonal ✓.
(ii): $\| \ldots \|^2 = \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle - 2 \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle =$
$= \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle = \| x - y \|^2$. □

Eigenschaft (ii) bedeutet, dass f Abstände (zwischen Ortspunkten der Vektoren x, y) nicht verändert. Wir wollen nun klären welche Abbildungen überhaupt (müssen nicht linear sein!) so sind, dass sie Abstände zwischen Punkten erhalten.

4.17. **Def.:** Eine Abbildung $F: V \to V$ heißt Isometrie, falls $\forall x, y \in V: \| F(x) - F(y) \| = \| x - y \|$.

4.18. **Satz:** Eine Abbildung $F: V \to V$ ist eine Isometrie genau dann, wenn es ein $a \in V$ und ein $f \in O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gibt mit $F(x) = f(x) + a$ für alle $x \in V$.

Bew.: „$\Leftarrow$" ✓, „$\Rightarrow$": Setze $f(x) := F(x) - F(0)$, also $a := F(0)$. Da $f(0) = 0$, gilt nach Vor. also $\| f(x) \| = \| F(x) - F(0) \| = \| x - 0 \| = \| x \|$ für alle x, somit ist $\forall x, y \in V$:

⊗ $2 \langle f(x), f(y) \rangle = \| f(x) \|^2 + \| f(y) \|^2 - \| f(x) - f(y) \|^2$
$= \| f(x) \|^2 + \| f(y) \|^2 - \| F(x) - F(y) \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - \| x - y \|^2 = 2 \langle x, y \rangle$.

Für $x, y \in V$ ist nun $\| f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) \|^2$ eine L.K. von Gliedern der Form $\langle f(a), f(b) \rangle$, wo $a, b \in \{ x, y, \alpha x + \beta y \}$. Wegen ⊗ ist dies $= \| (\alpha x + \beta y) - \alpha x - \beta y \|^2 = 0$. Also ist f linear. □