Vorlesung Lineare Algebra II

SoSe'20 hhu
K. Halupczok

§1: Bilinearformen

l5: Permutationen und Determinanten

Stichworte: Permutation, symmetrische Gruppe S_n, Transposition, Permutationsmatrix, (un)gerade Permutationen, Erzeugung durch Transpositionen/Spiegelungen, Leibniz-Formel für det

Dieses Kapitel l5 stellt eine Ergänzung zu Kapitel L19 aus LA I dar. Wir leiten eine weitere Formel zur Berechnung von Determinanten her, die auf Leibniz zurückgeht. Hierfür brauchen wir etwas über Permutationen, die auch anderweitig viele Anwendungen haben und auch unentbehrlich z.B. in "Algebra" sind. Die zugehörigen Permutationsmatrizen sind insb. orthogonale Matrizen.

5.1. **Def.:** Für jede natürliche Zahl n bezeichnet S_n die Menge der bijektiven Abbildungen $\pi: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$. Diese Abbildungen heißen Permutationen von $1,\dots,n$.
("Vertauschungen")

5.2. **Bem.:** Die identische Abbildung $id: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, $x \mapsto id(x) = x$, gehört natürlich zu S_n, ferner mit π auch die Umkehrabbildung π^{-1}, sowie mit σ und π die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \pi$. Damit bildet S_n eine Gruppe.

5.3. **Def.:** Die Gruppe $(S_n, \circ)$, d.h. mit der Verknüpfung "$\circ$", heißt symmetrische Gruppe S_n.

5.4. **Lemma:** (i) S_n ist eine abelsche Gruppe genau für $n \in \{1,2\}$.
(ii) S_n hat $n!$ viele Elemente, d.h. $\# S_n = n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$.

Bew.: (i) „$\Leftarrow$": Wir haben $S_1 = \{(1\mapsto 1)\} = \{id\}$ abelsch ✓
und $S_2 = \{id, \tau\}$ mit $\tau: \begin{smallmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 1\end{smallmatrix}$ abelsch, da $\tau \circ id = \tau = id \circ \tau$ ✓.

„$\Rightarrow$": Ist $n \geq 3$, betr. $\varrho: \begin{smallmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 3 \\ 3\mapsto 1 \\ x\mapsto x \\ (x>3)\end{smallmatrix}$ und $\sigma: \begin{smallmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 1 \\ x\mapsto x \\ (x>2)\end{smallmatrix}$. Dann ist $\varrho\circ\sigma(1) = \varrho(2) = 3$
$\neq 1 = \sigma(2) = \sigma\circ\varrho(1)$.

Also kann S_n nicht abelsch sein.

(ii): Den Wert für $\pi(1)$ kann man frei unter den $\{1,\dots,n\}$ wählen. Hat man das getan, stehen für $\pi(2)$ noch die restlichen $(n-1)$ vielen Werte zur Verfügung usw. □

5.5. Def: Für $n\in\mathbb{N}$ und $i,j\in\{1,\dots,n\}$ mit $i<j$ sei $\tau_{ij}\in S_n$ definiert durch

$$\tau_{ij}(k) := \begin{cases} j, & k=i,\\ i, & k=j,\\ k, & k\neq i, k\neq j.\end{cases}$$

$$\tau_{ij}: \begin{array}{l} i\mapsto j\\ j\mapsto i\\ k\mapsto k,\ k\neq i, k\neq j\end{array}$$

Eine solche Abbildung heißt Transposition.
($\tau_{ji}=\tau_{ij}$, $i\neq j$)

5.6. Bem.: Transpositionen sind die Abbildungen in S_n, die genau zwei der El. von $1,\dots,n$ vertauschen und alle anderen El. fest lassen. Offenbar ist $\tau^2 := \tau\circ\tau = id$, also $\tau=\tau^{-1}$ für jede Transposition τ. Diese sind also selbstinvers in S_n.
Aus Transpositionen lässt sich nun jede Permutation aufbauen:

5.7 Lemma: Jede Permutation $\pi\in S_n$ ist als Produkt von höchstens $(n-1)$ vielen Transpositionen darstellbar.

Bew.: Für $n\le 2$ ist dies offenbar richtig. Für größere n setze $m:=\pi(n)$.

- Ist $m=n$, so werden durch π im eigentlichen Sinne nur die Elemente von $\{1,\dots,n-1\}$ permutiert, was nach Induktionsvor. also mit höchstens $(n-1)-1=n-2<n-1$ vielen Transpositionen bewirkt werden kann.
- Ist $m<n$, so betrachte man zur Transposition τ_{mn} die Permutation $\pi' := \tau_{mn}\circ\pi$, für die $\pi'(n)=\tau_{mn}(\pi(n))=\tau_{mn}(m)=n$ gilt. Wie eben geschlossen kann man π' durch höchstens $n-2$ Transpositionen darstellen, somit $\pi=\tau_{mn}\circ\pi'$ durch $\le n-1$ viele. □

Im Zusammenhang mit Determinanten sind für uns die folgenden Matrizen interessant:

5.8 Def: Sei K ein Körper, seien $e_1,\dots,e_n$ die kanonischen Einheitsvektoren im K^n und sei $\pi\in S_n$ eine Permutation. Dann heißt die $n\times n$-Matrix $P_\pi := (e_{\pi(1)}|e_{\pi(2)}|\dots|e_{\pi(n)})$, deren k-te Spalte also gerade der $\pi(k)$-te Einheitsvektor ist, die Permutationsmatrix zur Permutation π. Ferner heißt $sig(\pi) := det(P_\pi)$ das Vorzeichen der Permutation π.

"Zweizeilenform"

5.9 Bsp.: • Sei $\pi \in S_4$ geg. durch $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&4&3\end{pmatrix}$, schreiben $\pi = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$, dann ist $P_\pi = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ und $sig(\pi)=det(P_\pi)=(-1)\cdot(-1)=1$.

- Für $\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ ist $P_\rho = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ und $sig(\rho)=det(P_\rho)=-1$.

Diese Bezeichnung "Vorzeichen" ist gerechtfertigt:

5.10. <u>Lemma:</u> (i) Für je zwei Permutationen $\sigma, \pi \in S_n$ ist $P_{\sigma\circ\pi} = P_\sigma \cdot P_\pi$,
und damit auch $\mathrm{sig}(\sigma\circ\pi) = \mathrm{sig}(\sigma)\cdot\mathrm{sig}(\pi)$.
(ii) Das Vorzeichen einer Transposition ist -1.
(iii) $\mathrm{sig}: S_n \to \{\pm 1\}$ ist Gruppenhomomorphismus.

<u>Bew.:</u> (i): Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren. Damit kann man also die jeweils j-te Spalte darstellen als $(P_\sigma P_\pi)(e_j) = P_\sigma(P_\pi(e_j)) = P_\sigma(e_{\pi(j)}) = e_{\sigma(\pi(j))}$ $= e_{(\sigma\circ\pi)(j)} = P_{\sigma\circ\pi}(e_j)$, woraus die Beh. folgt.
(ii): Die Permutationsmatrix einer Transposition erhält man aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen zweier Spalten, deren Determinante ist also $= -1$.
(iii): Wegen 5.7 und (i), (ii) bildet sig nach $\{\pm 1\}$ ab und ist Gruppenhom. □

5.11. <u>Def.:</u> Eine Permutation $\pi \in S_n$ mit $\mathrm{sig}(\pi) = +1$ heißt <u>gerade Permutation</u>, sonst <u>ungerade Permutation</u>. Die Untergruppe $A_n := \mathrm{Ker}(\mathrm{sig})$ der geraden Permutationen in S_n heißt <u>alternierende Gruppe</u>.

5.12. <u>Bem.:</u> 1. Die Anzahl der Transpositionen in einer Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen ist stets gerade (bei geraden Permutationen σ) oder stets ungerade (bei ungeraden Permutationen σ).
2. Die zu einer Transposition gehörende Permutationsmatrix hat nach Umnumerierung der Achsen (d.h. der Standardbasis) die Form $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline 0 & & I_{n-2} \end{array}\right)$. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bewirkt eine Spiegelung an/entlang der Ursprungsgeraden $L(e_1 - e_2)$, die die "x" und "y"-Achse vertauscht. Die Transpositionsabbildung zu τ_{ij}, d.h. die lin. Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto P_{\tau_{ij}} \cdot x$, vertauscht genau die Einheitsvektoren e_i und e_j. Laut Def. 4.9 handelt es sich um die Spiegelung $S_{e_i - e_j}$, weil $S_{e_i-e_j} \cdot e_i = \left(I_n - \frac{2}{2}\cdot(e_i - e_j)(e_i-e_j)^T\right)e_i$
$= e_i - (e_i - e_j)\cdot(e_i^T e_i - e_j^T e_i) = e_i - (e_i - e_j)(1-0) = e_j$, und analog ist $S_{e_i-e_j} \cdot e_j = e_j + (e_i - e_j) = e_i$. Aus Lemma 5.7 erhalten wir damit sofort eine Version des Satzes 4.14. für Permutationsmatrizen:

5.13. **Kor.:** (i) Jede Permutationsmatrix P ist Produkt von $\leq n-1$ vielen Spiegelungen $S_{e_i - e_j}$, die zu Transpositionen τ_{ij} gehören.
(ii) Eine Permutationsmatrix P ist Drehmatrix, d.h. $P \in SO(n)$, genau wenn sie Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen $S_{e_i - e_j}$ ist.
(iii) Die Menge der Permutationsmatrizen ist eine Untergruppe von $O(n)$.
Die Menge der geraden Permutationsmatrizen ist eine Untergruppe von $SO(n)$.

Eine Anwendung zur Determinantentheorie: Die Leibniz-Formel

Nutzen wir systematisch die bekannte n-Linearität der Determinante, so erhalten wir für die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ die Darstellung

$$\det(A) = \det(\underbrace{a_1 | a_2 | \cdots | a_n}_{\text{Spalten von } A}) = \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1 1} e_{i_1} \,\Big|\, \sum_{i_2=1}^{n} \alpha_{i_2 2} e_{i_2} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{i_n n} e_{i_n} \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_n \leq n} \alpha_{i_1,1} \cdot \alpha_{i_2,2} \cdots \alpha_{i_n,n} \cdot \det(e_{i_1} | \ldots | e_{i_n}),$$

wobei über alle Indextupel $(i_1, \ldots, i_n)$ mit Eintragungen aus $\{1, \ldots, n\}$ zu summieren ist. Kommen in einem solchen Tupel gleiche Indizes vor, so verschwindet die zugehörige Determinante (gleiche Spalten!), d.h. dann ist $\det(e_{i_1} | \ldots | e_{i_n}) = 0$, so dass also nur über die Tupel zu summieren ist, für die die Abb. $\pi: 1 \mapsto i_1,\ 2 \mapsto i_2, \ldots, n \mapsto i_n$ eine Permutation ist.
Rechts, d.h. die Terme $\det(e_{i_1} | \ldots | e_{i_n})$, stehen dann die Determinanten der zugehörigen Permutationsmatrizen, d.h. das Vorzeichen der jeweiligen Permutation.
Wir erhalten die Formel von Leibniz:

5.14. **Satz** (Leibnizsche Determinantenformel): Für eine $n \times n$-Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ über einen beliebigen Körper K gilt

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sig}(\pi) \cdot \alpha_{\pi(1),1}\, \alpha_{\pi(2),2} \cdots \alpha_{\pi(n),n}\,.$$

Für praktische Berechnungszwecke ist diese Formel völlig ungeeignet: Es müssen $n!$ viele Summanden berechnet werden; jeder enthält dabei $\operatorname{sig}(\pi) = \det P_\pi$.

Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \underline{\underline{\left(\frac{n}{e}\right)^n}}$$ wächst stark!