Dieses Titel-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Vorbereitungsblatt 0

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: gar nicht, nur online-Besprechung in den ersten Übungen am 28./29.4.

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1:

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Zeigen Sie: Ist U ein Untervektorraum von V, so gilt $U \oplus U^{\perp} = V$.

Aufgabe 2:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Zeigen Sie:

(a) AA^* ist selbstadjungiert.

(b) Ist A schiefsymmetrisch, d. h. $A^T = -A$, dann hat A bei ungeradem n den Eigenwert 0.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine schiefsymmetrische Matrix A an, die nicht den Eigenwert 0 hat (mit Nachweis dafür).

Aufgabe 3:

(a) Ist A selbstadjungiert, dann auch $\bar{A}$ und A^T. Ist A außerdem invertierbar, so ist auch A^{-1} selbstadjungiert.

(b) Ist das Produkt selbstadjungierter Matrizen wieder eine selbstadjungierte Matrix?

(c) Zeigen Sie, dass das Produkt orthogonaler Matrizen eine orthogonale Matrix ist.

(d) Zeigen Sie, dass das Produkt orthogonaler Matrizen mit Determinante 1 wieder eine orthogonale Matrix mit Determinante 1 ist.

(e) Gilt dies auch für orthogonale Matrizen mit der Determinanten -1?

Gilt alles auch für entsprechende Endomorphismen statt Matrizen?

Aufgabe 4:

Führen Sie die (reelle) Hauptachsentransformation an folgender symmetrischen Matrix aus (d. h. bestimmen Sie eine orthogonale Matrix X so, dass $X^T AX$ Diagonalgestalt hat):

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden

Wissensfragen zu l1 (d. h. Auswahl von L22–L26):

1.) Was ist eine Bilinearform?

2.) Wann heißt eine Bilinearform symmetrisch, wann alternierend?

3.) Was ist eine Sesquilinearform? Wann heißt sie hermitesch?

4.) Wann nennt man eine hermitesche Form positiv definit?

5.) Was ist ein Skalarprodukt?

6.) Welche Rechen-Eigenschaften hat ein Skalarprodukt?

7.) Wie ist das kanonische Skalarprodukt definiert? Wie kann man das kanonische Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definieren? Wie geht das mit dem hermitesch adjungierten Vektor?

8.) Wie definiert man mit einem Skalarprodukt die Länge bzw. Norm eines Vektors? Was ist der Abstand zwischen zwei Vektoren? Wie definiert man eine Metrik?

9.) Was ist ein euklidischer bzw. unitärer Raum?

10.) Was heißt „orthogonal" bzw. Senkrechtstehen?

11.) Was ist eine ONB?

12.) Was bedeutet $U^\perp$?

13.) Was ist der hermitesch adjungierte Endomorphismus f^* eines Endomorphismus f eines unitären Raums?

14.) Wann heißt f normal? Wann unitär/orthogonal/selbstadjungiert/hermitesch/symmetrisch?

15.) Wann nennt man eine quadratische Matrix des $\mathbb{C}^{n\times n}$ unitär/orthogonal/selbstadjungiert/hermitesch/symmetrisch?

16.) Wie kann man eine unitäre Matrix anhand ihrer Spalten erkennen?

17.) Warum gilt für eine unitäre Matrix, dass $|\det A| = 1$?

18.) Welche möglichen Werte hat $\det A$, wenn A eine orthogonale Matrix ist?

19.) Wie kann man einen normalen Endomorphismus über $\mathbb{C}$ mit seinen Eigenvektoren charakterisieren?

20.) Warum sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines normalen Endomorphismus orthogonal?

21.) Wie lautet der Hauptachsentransformationssatz für normale Endomorphismen/Matrizen?

22.) Wie sieht die Situation für selbstadjungierte/symmetrische Matrizen aus?

23.) Wie lautet der Normalformensatz für eine orthogonale Matrix?

24.) Welche Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n)$ kann man unterscheiden?