Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 2

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 7.5.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Durch die Gleichung $2\xi_1^2 + 3\xi_1\xi_2 - 2\xi_2^2 - 4\xi_1 - 3\xi_2 - 23 = 0$ wird eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ beschrieben. Scheiben Sie die Gleichung in der Form $\langle x, Ax\rangle + 2\langle b, x\rangle + \gamma = 0$ mit passender Matrix A, Vektor b und reellen Zahl γ.

(i) Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch, um den gemischten Term zu eliminieren und geben Sie die dazugehörige Orthonormalbasis an.

(ii) Welche vereinfachte Gleichung erhalten Sie?

(iii) Um welche Art von Kegelschnitt handelt es sich?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei V ein K-Vektorraum, K beliebiger Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Ist b eine symmetrische Bilinearform auf V, so heißt die Abbildung $q : V \to K$ mit $q(x) := b(x, x)$ eine quadratische Form auf V. Zeigen Sie:

(i) Für alle $x \in V$ und $\alpha \in K$ gilt $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$.

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt $b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$.

(iii) Ist $A \in K^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, so ist durch $q(x) = x^T Ax$ eine quadratische Form gegeben.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(i) Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zeigen Sie für $a, b \in V$: Wenn für alle $x \in V$ gilt, dass $\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle$, so ist $a = b$.

(ii) Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Zeigen Sie die Parsevalsche Gleichung: Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für alle $x, y \in V$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, b_j\rangle \overline{\langle y, b_j\rangle}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Zeigen Sie das folgende Lemma: Für linear unabhängige $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = \|b\| = 1$ und $x \in \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ gilt

$$\langle x, S_a S_b x\rangle = \langle x, x\rangle(2\langle a, b\rangle^2 - 1),$$

dabei bezeichnet S_a die Spiegelungsmatrix $S_a = I_n - \frac{2}{\langle a,a\rangle} aa^T$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu l3 und l4: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wie beschreibt man eine Fläche 2-ten Grades im $\mathbb{R}^n$ mit einer allgemeinen Gleichung?

2.) Welchen anderen Namen gibt es für eine solche Fläche?

3.) Was ist eine quadratische Form, was ist eine Linearform?

4.) Wie kann man eine solche Gleichung mit einer symmetrischen Matrix A beschreiben?

5.) Wie kann man in einem ersten Schritt eine Quadrikengleichung mit einer Hauptachsentransformation vereinfachen?

6.) Wie kann man anschließend mit der Signatur der Matrix eine weitere Vereinfachung finden?

7.) Welche Art von Kurven erhält man im Fall $n = 2$ (in den nicht entarteten Fällen)?

8.) Welche drei Arten von Kegelschnitten gibt es und wie unterscheiden sich diese in ihren Gleichungen?

9.) Welche Art von Flächen erhält man im Fall $n = 3$ (in den nicht entarteten Fällen)? Welche davon haben ein Zentrum?

10.) Wie bestimmt die positive/negative (semi-/in-)Definitheit den Typ der Quadrik?

11.) Kann man jede Bilinearform eindeutig durch eine zugehörige Matrix beschreiben? Wie bekommt man diese?

12.) Was ist die allgemeine lineare Gruppe im $\mathbb{R}^n$? Was bedeuten die Bezeichnungen $GL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n) = O^+(n)$ und $O^-(n)$?

13.) Warum kann $O^-(n)$ keine Untergruppe von $O(n)$ bzw. $GL_n(\mathbb{R})$ sein?

14.) Welche Matrix gibt die Spiegelung an, die den $\mathbb{R}^n$ an der zu a orthogonalen Hyperebene spiegelt?

15.) Ist jede Drehung des $\mathbb{R}^n$ Produkt zweier Spiegelungen?

16.) Kann jedes Element der orthogonalen Gruppe als Produkt von Spiegelungen geschrieben werden? Wieviele reichen dafür maximal?

17.) Wie wird die orthogonale Gruppe eines reellen Vektorraums V definiert?

18.) Welche Abbildungen eines reellen Vektorraums in sich nennt man eine Isometrie?

19.) Wie kann man Isometrien eineindeutig mit orthogonalen Endomorphismen des Vektorraums charakterisieren?