Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 4

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Freitag 22.5.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (8 Punkte):
Seien f und g die Endomorphismen des $\mathbb{R}^3$, die durch die Matrizen

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardbasis) beschrieben werden.

(i) Berechnen Sie die charakteristischen Polynome von f und g.

(ii) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von f bzw. g, sowie jeweils die Menge der Hauptvektoren 2. Stufe.

(iii) Wählen Sie aus der Menge der Eigenvektoren von f eine Basis und stellen Sie f bzgl. dieser Basis dar.

(iv) Wählen Sie aus der Menge der Eigenvektoren von g eine maximale linear unabhängige Familie und ergänzen Sie sie mit Hauptvektoren zu einer Basis. Stellen Sie g bzgl. dieser Basis dar.

Mit welchen Hauptvektoren lässt sich g derart auf Jordansche Normalform bringen?

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Sei K ein Körper. Ordnet man $p, q \in K[T]$ mit $p(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_n T^n$ das Polynom $p(q) := \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$ zu, so erhält man eine Abbildung

$$\mu : K[T] \times K[T] \to K[T],\ (p, q) \mapsto p(q).$$

Zeigen Sie:

(i) Mit μ als Multiplikation ist $K[T]$ keine Algebra.

(ii) μ ist nicht kommutativ.

(iii) Es gibt ein Polynom $p_0 \in K[T]$, so dass

$$\mu(p_0, q) = \mu(q, p_0) = q \text{ für alle } q \in K[T] \text{ ist.}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(i) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(p_1, p_2)$ für die beiden Polynome

$$p_1(T) = T^5 - 2T^3 + T^2 + T - 1,\ p_2(T) = T^4 - 2T^3 + T^2 + T - 1 \in \mathbb{R}[T]$$

mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

(ii) Zeigen Sie, dass die beiden Polynome

$$q_1(T) = T^4 + T^3 - T^2 + 1,\ q_2(T) = T^3 - T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$$

teilerfremd sind, und bestimmen Sie Polynome $s_1, s_2 \in \mathbb{R}[T]$ so, dass $1 = s_1 q_1 + s_2 q_2$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu l7 und l8: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist eine K-Algebra?

2.) Welche Beispiele für nichtkommutative K-Algebren können Sie nennen?

3.) Wie definiert man die Polynomalgebra $K[T]$ als eine freie, von einem Element erzeugte K-Algebra?

4.) Was ist ein K-Algebren-Homomorphismus?

5.) Wie lautet der Satz vom „Einsetzhomomorphismus“ für Algebren?

6.) Warum vertauschen zwei Endomorphismen, die jeweils durch Einsetzen eines festen Endomorphismus in ein Polynom entstanden ist?

7.) Was ist der Grad eines Polynoms? Wann nennt man ein Polynom normiert?

8.) Wie lautet der Satz von der Polynomdivision bzw. Division mit Rest in $K[T]$?

9.) Wie definiert man Teilbarkeit in $K[T]$?

10.) Was ist ein ggT zweier Polynome? Ist dieser eindeutig bestimmt?

11.) Wann heißen zwei Polynome teilerfremd?

12.) Wie kann man einen ggT zweier Polynome rein rechnerisch bestimmen?

13.) Wie zeigt man damit die Darstellbarkeit des $\mathrm{ggT}(p_1, p_2)$ als $K[T]$-Linearkombination von p_1 und p_2?

14.) Gelten der Satz vom euklidischen Algorithmus und der Satz von Bézout auch für $\mathbb{Z}$ anstelle $K[T]$? Inwiefern, wie ist dann deren Wortlaut? Könnte man sich diese Sätze durch „Einsetzen“ ganzer Zahlen in passende Polynome herleiten?