Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 5

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 4.6.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei K ein Körper. Ein Untervektorraum $I \subseteq K[T]$ heißt Ideal, falls für alle $p \in K[T]$ und $q \in I$ gilt: $pq \in I$. Für $p \in K[T]$ sei

$$I_p := \{q \in K[T];\ p \text{ teilt } q\}$$

die Menge der Polynome, die Vielfache von p sind. Zeigen Sie:

(a) Für alle $p \in K[T]$ ist I_p ein Ideal.

(b) Für alle $p, q \in K[T]$ gilt: p teilt $q \Leftrightarrow I_q \subseteq I_p$.

(c) Ist $I \subseteq K[T]$ ein Ideal, so existiert ein $p \in K[T]$ mit $I_p = I$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei $A := \mathrm{Hom}(V, V)$ die K-Algebra der Endomorphismen von V, sei $h \in A$ und sei $f_h : K[T] \to A$ der K-Algebren-Homomorphismus mit $f_h(T) = h$ (der Einsetzhomomorphismus aus ℓ7.13.). Zeigen Sie:

(a) Das Bild von f_h ist eine kommutative Algebra.

(b) Ist h nilpotent, d. h. falls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $h^n = 0$ existiert, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\ker(f_h) = I_q$ und $q = T^m$. (Mit der Definition von I_q wie in Aufgabe 1. Tipp: Idealeigenschaft von $\ker(f_h)$ zeigen, dann Aussagen aus Aufgabe 1 anwenden.)

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Zeigen Sie: Ist $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ irgendein Lösungspaar der linearen Gleichung $xa + yb = c$, so haben alle Lösungspaare die Form

$$x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at,\ t \in \mathbb{Z}.$$

(b) Mr. Bubba Magillicutty löst einen Scheck bei seiner Bank ein. Der Kassierer verwechselt dabei die Anzahl der Cents mit der Anzahl der Dollars. Dieser Verwechslung nicht gewahr werdend, spendet Mr. Magillicutty 68 Cents für die Kuchenkasse der Bankangestellten. (Dieser Betrag soll dabei vom Scheck abgezogen werden, weil er kein Bargeld bei sich hat.) Zu seiner Überraschung bekommt er das Doppelte des Betrages, der ursprünglich auf dem Scheck stand, ausgezahlt. Bestimmen Sie den kleinsten Wert, über den der Scheck ausgestellt gewesen sein muss.

(Hinweis: x Dollar, y Cents liefern die Gleichung $100y + x - 68 = 2(100x + y)$.)

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie Satz ℓ9.7: Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind je zwei Polynome genau dann teilerfremd, wenn sie keine gemeinsame Nullstelle haben.

(b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass in $K[T]$ gilt: Jedes prime Polynom ist irreduzibel. (Vgl. Skript ℓ9.12: $q \in K[T]$ heißt prim, falls für alle $a, b \in K[T]$ gilt: $q \mid ab \Rightarrow q \mid a \vee q \mid b$.)

Bitte wenden

Wissensfragen zu l9: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Warum ist λ genau dann Nullstelle eines Polynoms, wenn $T - \lambda$ das Polynom teilt?

2.) Wie lautet der Zerlegungssatz von Polynomen $\in K[T]$, wenn K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist?

3.) Wie schreibt man die Formel in diesem Zerlegungssatz auf, wenn man gleiche Faktoren darin zusammenfasst?

4.) Was nennt man die Vielfachheit bzw. Ordnung einer Nullstelle?

5.) Können teilerfremde Polynome Nullstellen gemeinsam haben?

6.) Was ist ein irreduzibles Polynom, was ein reduzibles Polynom?

7.) Wie lautet der Zerlegungssatz von Polynomen $\in K[T]$ in irreduzible Faktoren?

8.) Welches Lemma benötigt man dabei beim Beweis der Eindeutigkeit der Zerlegung?

9.) Geht alles auch analog für $\mathbb{Z}$ anstelle $K[T]$? Wie heißt der Zerlegungssatz in der $\mathbb{Z}$-Version noch?

10.) Welche Polynome sind über algebraischem Körper irreduzibel?

11.) Welche Grade können irreduzible Polynome in $\mathbb{R}[T]$ haben?

12.) Welche Grade können irreduzible Polynome in $\mathbb{Q}[T]$ haben?