Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 6

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Freitag 12.6.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für das Minimalpolynom ψ_f gilt: $\psi_f(T) = (T-2)^2(T+1)$.

(b) Bestimmen Sie nichttriviale f-invariante Untervektorräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$, wählen Sie Basen für sie und geben Sie die zugehörige Matrixdarstellung von f an.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei K ein Körper und U ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{Hom}(U,U)$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\lambda \in K$ genau dann Eigenwert von f, wenn $\psi_f(\lambda) = 0$ ist. (Hinweis: Für die nicht offensichtliche Implikation spalte man einen Linearfaktor von ψ_f ab, setze f in den resultierenden Quotienten ein und finde einen Eigenvektor in dessen Bild.)

(b) Das charakteristische Polynom χ_f und das Minimalpolynom ψ_f haben dieselben Nullstellen in K. Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist ψ_f ein Teiler von χ_f. (Letzteres gilt über jedem Körper.)

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei U ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Ein Endomorphismus $f : U \to U$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für sein Minimalpolynom ψ_f gilt: $\psi_f(0) \neq 0$.

(b) Und weiter: Ist f invertierbar, so lässt sich die Umkehrfunktion f^{-1} als Polynom in f schreiben.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei U ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $f \in \mathrm{Hom}(U,U)$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom ψ_f von f, wenn f (i) nilpotent (d. h. $f^r = 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$), und (ii) idempotent (d. h. $f^2 = f$) ist.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch Multiplikation mit der schiefsymmetrischen Matrix A gegeben, d.h. es gilt $A^T = -A$. Bestimmen Sie ψ_f.

Bitte wenden

Wissensfragen zu l10: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wie ist ein f-invarianter Untervektorraum definiert?
2.) Was ist das Minimalpolynom eines Endomorphismus f?
3.) Warum existiert es?
4.) Wie steht ψ_f in Beziehung zu anderen Polynomen, die f annulieren?
5.) Wie kann man ganz leicht mit einem Polynom $p \in K[T]$ einen f-invarianten Unterraum konstruieren?
6.) Wenn das Mipo Produkt zweier nichtkonstanter teilerfremder Polynome ist, welche Eigenschaften haben dann die zugehörigen invarianten Unterräume?
7.) Wie liefert die Zerlegung von ψ_f in irreduzible Polynome eine Zerlegung von V in f-invariante Unterräume?
8.) Welche Matrixdarstellung ergibt sich dafür? Warum?
9.) Wie ist die Situation für einen algebraisch abgeschlossenen Körper wie etwa $\mathbb{C}$?
10.) Wann erhält man dabei eine Diagonalmatrix?