Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 7

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 18.6.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch Multiplikation mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_f von f.

(b) Bestimmen Sie die komplexen Nullstellen von χ_f und geben Sie seine Primfaktorzerlegung über $\mathbb{R}[T]$ an.

(c) Berechnen Sie das Minimalpolynom ψ_f von f.
(Hinweis: Benutzen Sie Teil (b) und Aufgabe 2 von Blatt 6.)

(d) Bestimmen Sie die zu den (über $\mathbb{R}[T]$) irreduziblen Faktoren von ψ_f gehörenden f-invarianten Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$, wählen Sie Basen für sie und geben Sie die zugehörige Matrixdarstellung von f an.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch Multiplikation mit der Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von f. (Hinweis: Berechnen Sie F^3+6I_4 und F^2+3F.)
Als Rechenhilfe verraten wir $F^2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 16 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -9 & 0 & -12 & -9 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $F^3 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 19 & 18 \\ 17 & -8 & 23 & 17 \\ -18 & 0 & -27 & -18 \\ 17 & 0 & 23 & 9 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von f. Zerlegen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom in irreduzible Faktoren.
(Hinweis: Ein Eigenwert von f ist offensichtlich.)

(c) Bestimmen Sie zu den irreduziblen Faktoren des Minimalpolynoms die zugehörigen f-invarianten Unterräume $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ mit $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$ (gemäß Satz ℓ10.11) und geben Sie Basen für U_1 und U_2 an.

(d) Zeigen Sie, dass (mindestens) einer der Räume U_1 und U_2 ein f-zyklischer Raum ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom des Jordan-Kastens

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n\times n}.$$

(Hinweis: Beweisen Sie mit Induktion die Matrixdarstellung für $(F-\lambda I)^k$ für $k = 1, ..., n$.)

Bitte wenden

Wissensfragen zu l11: (nur mündlich, ohne Abgabe)

Sei U ein nichttrivialer K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(U)$ mit Mipo $\psi(T) = p(T)^r$, $p \in K[T]$ ein irreduzibles Polynom.

1.) Welche Unterräume von U werden Haupträume genannt?
2.) Bilden die Haupträume eine per Inklusion geordnete Kette von Unterräumen von U?
3.) Welche Unterräume von U nennt man f-zyklisch?
4.) Welche möglichen Erzeuger kann man für einen f-zyklischen Raum $V(u)$ angeben?
5.) Welche Dimension hat $V(u)$, wenn u im m-ten, aber nicht im $(m-1)$-ten Hauptraum liegt?
6.) Warum gibt es einen f-zyklischer Unterraum, der die Dimension $\deg(\psi)$ hat?
7.) Sind f-zyklische Unterräume weiter zerlegbar in direkte Summen?
8.) Warum kann der Grad von ψ höchstens $\dim(U)$ sein?
9.) Wie kann man eine direkte-Summen-Zerlegung von U mit f-zyklischen Unterräumen algorithmisch ermitteln?
10.) Worauf muss man bei der Wahl der u_{ij} im Algorithmus achten, damit die Summe der $V(u_{ij})$ direkt wird?