Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 8

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 25.6.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Berechnen Sie das Minimalpolynom von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

und geben Sie seine Zerlegung in irreduzible Faktoren über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ an.
Geben Sie die Normalform (wie sie in Satz ℓ12.1 behauptet wird) von A über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ an.

Aufgabe 2 (7 Punkte):

Gegeben sei der Endomorphismus $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ aus Aufgabe 2 von Blatt 7,
der gegeben ist durch Multiplikation mit der Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
Dort wurde $\mathbb{R}^4$ zerlegt in $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$ mit f-invarianten Unterräumen $U_1 = L(b_1, b_2)$ und $U_2 = L(b_3, b_4)$, wobei $b_1 = e_2$, $b_2 = e_1 - e_4$, $b_3 = -e_1 + e_3$, $b_4 = e_2 + e_4$. Der Raum U_2 ist f-zyklisch, da $f(b_3) = b_4$. Sei nun $U := L(b_1, b_3, b_4) = L(b_1) \oplus U_2$ und $u := b_1 + b_3 \in U$.

(a) Zeigen Sie, dass $C := (u, f(u), f^2(u))$ eine Basis von U ist. (Es gibt also ein $u \in U$ mit $U = W(u)$. In diesem Sinne ist U ein f-zyklischer Raum.)

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $f_{|U}$ bzgl. der Basis $(f^2(u), f(u), u)$ von U.

(c) Zu welchem Polynom ist die Matrix aus (b) Begleitmatrix? Zerlegen Sie dieses Polynom in irreduzible Faktoren.

(d) Bestimmen Sie eine Zerlegung von U_2 in unzerlegbare Räume.

(e) Bestimmen Sie eine Zerlegung von U in unzerlegbare Räume.

Fazit: Es kann f-zyklische Unterräume U in V geben (d. h. mit $U = W(u)$ für ein $u \in U$), die sich weiter in unzerlegbare Räume zerlegen lassen, wenn nicht Vor. ℓ11.1 für sie erfüllt ist. Das Beispiel zeigt auch: Die direkte Summenzerlegung eines Raumes V in f-zyklische Räume ist im allgemeinen nicht eindeutig, da hier $V = L(b_1) \oplus L(b_2) \oplus U_2 = L(b_2) \oplus U$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ durch Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

Bestimmen Sie die Jordan-Darstellung von f sowie die zugehörige Basis von $\mathbb{C}^4$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu l12: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Welche Voraussetzungen hat der (allgemeine) Satz über die Zerlegung eines Raumes nach einem Endomorphismus f?

2.) Welche Polynome müssen dafür bekannt sein?

3.) Welche Grob- und welche Feinzerlegung in f-invariante Unterräume gibt es laut diesem Satz?

4.) Kann man diese Zerlegung noch weiter verfeinern?

5.) Was ist die maximale Dimension eines f-zyklischen Unterraumes, der in der direkten Summenzerlegung eines Hauptraumes vorkommt?

6.) Kommt diese maximale Dimension tatsächlich vor?

7.) Welche Basis eines f-zyklischen Summanden $V(u_{i,j})$ führt zu der behaupteten Matrixdarstellung von $f_{|V(u_{i,j})}$?

8.) Wie lautet diese Matrixdarstellung dann im einzelnen?

9.) Was für Begleitmatrizen treten dabei auf?

10.) Wie konstruiert man die zugehörigen Basiselemente?