Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 9

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 2.7.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei $p(T) = T^k + \alpha_{k-1}T^{k-1} + \cdots + \alpha_0 \in K[T]$ ein normiertes Polynom und

$$G_p = \begin{pmatrix} -\alpha_{k-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{k-2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

seine Begleitmatrix.

(a) Zeigen Sie, dass p das Minimalpolynom von G_p ist.

Hinweis: Wäre $\deg(\mathrm{Mipo}(G_p)) < k$, so müsste eine nichttriviale Linearkombination der Potenzen $G_p^0, G_p^1, \dots, G_p^{k-1}$ verschwinden. Wenden Sie diese Linearkombination auf den Einheitsvektor e_k an.

(b) Beschreiben Sie die Normalform von G_p für $K = \mathbb{C}$.

(c) Bestimmen Sie die Normalform von G_p für das Polynom $p(T) = T^4 + T^3 - 3T^2 - 5T - 2$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom $(T-\lambda)^r$ für ein $\lambda \in K$. Sei $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ eine Zerlegung von V in f-zyklische Unterräume (laut $\ell 12.1$). Zeigen Sie: Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ existiert genau ein eindimensionaler Eigenraum in V_i.
Hinweis: Argumentieren Sie anhand der Jordanschen Normalform.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $\chi_A(T) = (T-7)^5(T-13)^2(T+1)^3$ und $\psi_A(T) = (T-7)^2(T-13)^2(T+1)^2$.

(a) Bestimmen Sie alle möglichen JNFen der Matrix $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke).

(b) Lösen Sie Teil (a) unter der Zusatzvoraussetzung $\dim E_7(A) = 3$, wobei $E_7(A)$ den Eigenraum von A zum Eigenwert 7 bezeichnet.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie: Das lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ besitzt genau dann eine konstante Lösung $y \neq 0$, wenn $\mathrm{rg}\, A < n$ ist.

Bitte wenden

Wissensfragen zu l13 und l14: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wie lautet der Satz zur Jordanschen Normalform über einem abgeschlossenen Körper?

2.) Ist über $\mathbb{C}$ jeder Endomorphismus trigonalisierbar?

3.) Unter welchen Voraussetzungen ist ein Endomorphismus eines $\mathbb{C}$-Vektorraums diagonalisierbar?

4.) Wie stehen das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom eines Endomorphismus (über beliebigem Körper) miteinander in Beziehung?

5.) Wie oft erscheinen die Begleitmatrizen im allgemeinen Zerlegungssatz insgesamt in der Diagonalen?

6.) Wieviele Begleitmatrizen enthält die größte auftretende Teilmatrix F_{ij} darin?

7.) Bei Zerlegung von χ bzw. ψ in Linearfaktoren $T - \lambda_i$: Wie groß ist der zum EW λ_i gehörende größte Jordanblock? Wieviele Jordanblöcke gibt es insgesamt zum EW λ_i? Wie kann man an der JNF die algebraische Vielfachheit von λ_i ablesen? Und wie die geometrische Vielfachheit?

8.) Was besagt der Satz von Cayley–Hamilton?

9.) Wie kann man das Minimalpolynom anhand des charakteristischen Polynoms und den zugehörigen Haupträumen ermitteln?

10.) Wie schreibt man ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in Kurzform auf?

11.) Wann nennt man es homogen, wann inhomogen?

12.) Welche Struktur hat demnach die Lösungsmenge?

13.) Warum hat ein Anfangswertproblem höchstens eine Lösung?

14.) Warum hat es tatsächlich genau eine Lösung?

15.) Auf welchen Spezialfall kann man sich dabei dank der Jordanschen Normalformtheorie zurückziehen?

16.) Wie behandelt man dann den allgemeinen Fall?