Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1
Übungsblatt 11

Abgabe bis 2. Juli 2014, 10:20 Uhr

Aufgabe 1. Bestimme die Ränge der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} 1 & i+1 & i \\ 1 & 2+i & 5+i \\ 3 & 4+3i & 7+3i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C}),$$

$$\begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] \\ [4] & [5] & [6] \\ [7] & [8] & [9] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{F}_p), \text{ für die Fälle } p = 2, 3, 5$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. (Parallelprojektion)
Wir wollen in dieser Aufgabe ein einfaches Modell für Projektion einer dreidimensionalen Szenerie auf einen zweidimensionalen Bildschirm (oder den Aufnahmebereich einer Kamera) betrachten. Wir nehmen an, dass die Kamera in der x-y-Ebene liegt und wir betrachten hierfür die Abbildung

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + az, y + bz, 0),$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

a) Zeige, dass π eine Projektionsabbildung ist im Sinne von Blatt 8, Aufgabe 3 und bestimme Bild und Kern von π in Abhängigkeit von a und b.

Wir nehmen nun an, dass unser Bildschirm dem quadratischen Bereich $B := [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{0\}$ um den Ursprung entspricht.

b) Bestimme das Urbild $\pi^{-1}(B)$ in Abhängigkeit von a und b. Fertige eine Skizze an für den Fall $a = b = 0$.

Wenn wir annehmen, dass wir mit unserer "Kamera" in die positive z-Richtung schauen, dann ist die Menge $\pi^{-1}(B) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$ der Sichtbereich der Kamera. Hierbei können wir π als sogenannte Parallelprojektion des Sichtbereiches auf den Bereich B auffassen (denkbar wären auch andere Projektionen, wie etwa eine perspektivische Projektion).

Zur Belebung der Szenerie sei nun Δ ein Dreieck in $\mathbb{R}^3$ mit Eckpunkten

$$(0, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 3)$$

gegeben.

c) Bestimme $\pi(\Delta)$ in Abhängigkeit von a und b (es genügt, die Bilder der Eckpunkte anzugeben).

d) Wir bewegen nun den Bereich B entlang der x-Achse, d.h. wir betrachten den verschobenen Bereich $B_t := (t, 0, 0) + B := \{(t, 0, 0) + p \mid p \in B\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und nehmen an, dass sich der Sichtbereich von B entsprechend mitverschiebt. Wir nehmen an, dass $b = 0$. Für welche $a > 0$ gibt es dann ein t, so dass $\pi(\Delta) \subset B_t$?

Wir wollen nun die Drehung unserer Kamera gegen den Uhrzeigersinn um einen Winkel ϕ in der x-y-Ebene simulieren. Wir nehmen dabei für $\phi = 0$ die Vektoren $e_1 = (1, 0, 0)$ und $e_2 = (0, 1, 0)$ als Ausgangsbasis für die x-y-Ebene an und für $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Standardbasis $e_1, e_2, e_3 = (0, 0, 1)$.

e) Beschreibe einen solchen Vorgang mit Hilfe eines Koordinatenwechsels in der x-y-Ebene (Tip: man erinnere sich an die Drehmatrizen) und gib die darstellende Matrix für $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{Bild}(\pi)$ in den neuen Koordinaten in Abhängigkeit von ϕ an. Beschreibe $\pi(\Delta)$ in den neuen Koordinaten in Abhängigkeit von ϕ.

Statt einer Drehung der Kamera kann man auch eine Drehung der Szenerie, z.B. um die z-Achse und einen Winkel ψ betrachten. Das heisst, dass wir dieses mal die Basis e_1, e_2 der x-y-Ebene fest lassen und stattdessen die Ausgangsbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ verändern.

f) Beschreibe eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um die z-Achse um den Winkel ψ als Koordinatenwechsel und bestimme eine Matrixdarstellung von π in den neuen Koordinaten. Hinweis: man bedenke, dass eine Drehung um die z-Achse diese fest lässt.

(1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 3. Es seien K ein Körper und $V_1, \ldots, V_n$ endlich-dimensionale K-Vektorräume. Man betrachte eine Folge von linearen Abbildungen:

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} \{0\},$$

so dass gilt $f_{i+1} \circ f_i = 0$ für alle $0 \leq i < n$. Für jedes $1 \leq i \leq n$ setzen wir:

$$H^i := \mathrm{Kern}(f_i) / \mathrm{Bild}(f_{i-1}).$$

Zeige:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim H^i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i.$$

(4 Punkte)