Aufgabe 1

(a) Wahr!

Eine elementare Zeilenumformung entspricht der Multiplikation einer Elementarmatrix von links. Somit gilt $A' = BA$ für eine geeignete Matrix $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

B = Produkt der ganzen Elementarmatrizen welche man für die Transformation $A \rightsquigarrow A'$ verwendet

Da die Determinante multiplikativ ist erhalten wir

$$\det(A') = \det(BA) = \underbrace{\det(B)}_{\neq 0, \text{ da } B \text{ invertierbar}} \det(A),$$ ← 11.11

sodass $\det(A') = 0$ genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

(b) Wahr!

Ist b die j-te Spalte von A, so gilt

$$A e_j = b,$$

wobei $e_j = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0)$ der j-te Standardbasisvektor ist.

(c) Wahr!

Da $BA = E$, besitzt A eine Linksinverse und B eine rechtsinverse Abb. Somit ist A injektiv und B surjektiv. Wir erhalten ← Blatt 1 Aufgabe 2 und analog

zudem

$$n = \dim(K^n) \overset{\substack{\text{Rang-}\\ \text{satz}}}{\underset{8.21}{=}} \mathrm{rank}(A) + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(A))}_{= 0, \text{ da } A \text{ injektiv}} \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{im}(A) \subset K^m}}{\leq} \dim(K^m) = m.$$

(d) Falsch!

Da $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ eine Basis sind, ex. genau eine lin. Abb. ← 8.10
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_1) = f(a_2) = a_3$ und $f(a_3) = a_1$.

(e) Falsch!

Hatten gezeigt, dass es $\frac{p^n - 1}{p - 1}$ versch. Geraden in $\mathbb{F}_p^n$ gibt. ← Blatt 4 Aufgabe 4

Für $p = 5$ und $n = 3$ also $\frac{5^3 - 1}{4} = \frac{124}{4} = 31$ Stück.

Aufgabe 2

Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(T) = \det(A - T\cdot \mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} 4-T & 0 & 5 \\ 6 & 1-T & 6 \\ 5 & 6 & 2-T \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} (4-T)(1-T)(2-T) + \underbrace{6^2}_{=1} 5 - \underbrace{5^2}_{=4}(1-T) - \underbrace{6^2}_{=1}(4-T)$$

$$= (4 - 4T - T + T^2)(2-T) + 5 + 3(1-T) + 6(4-T)$$

$$= 1 + 6T + 5T + 2T^2 + 3T + 4T^2 + T^2 + 6T^3 + 5 + 3 + 4T$$

$$+ 3 + T$$

$$= 6T^3 + 5T + 5$$

Ausprobieren (7 Möglichkeiten, da $\mathbb{F}_7$) liefert die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Nun berechnen wir die Eigenräume:

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - 2\cdot\mathrm{Id}) = \ker(A + 5\mathrm{Id})$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} -1$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} -2$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^3 \;\middle|\; x_1 + 6x_3 = 0,\ 5x_1 + 6x_2 = 0 \right\}$$

$x_1 + 6x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_3 = -6^{-1} x_1$

$= -6x_1$

$= x_1$

$5x_1 + 6x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = -5\cdot 6^{-1} x_1$

$= 2 \cdot 6 x_1$

$= 5x_1$

$$\rightsquigarrow \;= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{F}_7 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_{\lambda_2} = \ker(A - 3\cdot \mathrm{Id}) = \ker(A + 4\cdot \mathrm{Id})$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \; +1$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \; +2$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \; +3$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^3 \;\middle|\; x_1 + 5x_3 = 0,\; 5x_2 + 4x_3 = 0 \right\}$$

$x_1 + 5x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -5x_3$

$= 2x_3$

$5x_2 + 4x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = -4\cdot 5^{-1} x_3$

$= 3\cdot 3\, x_3$

$= 2x_3$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{F}_7 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Somit gilt $\underbrace{\dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2})}_{=2} < 3$, sodass A nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3

Wir berechnen die Determinante von B:

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 2t-2 & t+3 & -1 \\ 3t-3 & 2t+7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t+3 & 1 \\ 0 & 2t+7 & 3 \end{pmatrix} -3$$

$$= \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t+3 & 1 \\ 0 & -(t+2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}} (t-1)\det\begin{pmatrix} t+3 & 1 \\ -(t+2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (t-1)(t+2).$$

Somit ist B für alle $t \in K\setminus\{1,-2\}$ invertierbar. Von nun an sei $t \in K\setminus\{1,-2\}$. Wir berechnen die Inverse von B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} t-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2t-2 & t+3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3t-3 & 2t+7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} t-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t+3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2t+7 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) -3$$

wie oben

$$\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} t-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t+3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -(t+2) & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \frac{t+3}{t+2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} t-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2+3\frac{t+3}{t+2} & 1-3\frac{t+3}{t+2} & \frac{t+3}{t+2} \\ 0 & -(t+2) & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +1 \\ \\ \cdot -\frac{1}{t+2} \end{array}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} t-1 & 0 & 0 & -1+3\frac{t+3}{t+2} & 1-3\frac{t+3}{t+2} & \frac{t+3}{t+2} \\ 0 & 0 & 1 & -2+3\frac{t+3}{t+2} & 1-3\frac{t+3}{t+2} & \frac{t+3}{t+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{t+2} & \frac{3}{t+2} & -\frac{1}{t+2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{t-1} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Big\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1}+3\frac{t+3}{(t+2)(t-1)} & \frac{1}{t-1}-3\frac{t+3}{(t+2)(t-1)} & \frac{t+3}{(t+2)(t-1)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{t+2} & \frac{3}{t+2} & -\frac{1}{t+2} \\ 0 & 0 & 1 & -2+3\frac{t+3}{t+2} & 1-3\frac{t+3}{t+2} & \frac{t+3}{t+2} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}_{=B^{-1}}$$

Aufgabe 4

Im Schnitt $V \cap U$ liegen genau die Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$, sodass es $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ und $w = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$.
Wir betrachten daher das Gleichungssystem

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 = 0,$$

also die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2 \\ +1 \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist also gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -2\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 = 0,\ 2\lambda_2 - 3\mu_1 - 3\mu_2 = 0,\ \mu_1 - \mu_2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ a \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -2\lambda_1 + \lambda_2 - a = 0,\ 2\lambda_2 - 6a = 0,\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ a \\ a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

Somit erhalten wir also

$$V \cap U = \{ a v_1 + 3a v_2 \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ a (v_1 + 3 v_2) \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle v_1 + 3 v_2 \rangle$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle$$

Basis von $V \cap U$

Aufgabe 5

„$\Rightarrow$":

Sei $f: V \to W$ affin, d.h. es ex. ein $\omega \in W$, sodass $g: V \to W$, $v \mapsto f(v) - \omega$ lin. ist. Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ und $a_1, \dots, a_r \in K$ mit $\sum_{i=1}^r a_i = 1$. Dann gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^r a_i v_i\right) \overset{v}{=} g\left(\sum_{i=1}^r a_i v_i\right) + \omega \overset{g \text{ lin.}}{=} \left(\sum_{i=1}^r a_i g(v_i)\right) + \omega$$

$$= \left(\sum_{i=1}^r a_i (f(v_i) - \omega)\right) + \omega$$

$$= \sum_{i=1}^r a_i f(v_i) \underbrace{- \underbrace{\sum_{i=1}^r a_i}_{=1} \omega + \omega}_{=0}$$

$$= \sum_{i=1}^r a_i f(v_i)$$

„$\Leftarrow$":

Sei $f: V \to W$ eine Abb, sodass $f\left(\sum_{i=1}^r a_i v_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^r a_i f(v_i)$ für alle $r \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_r \in K$ mit $\sum_{i=1}^r a_i = 1$ und $v_1, \dots, v_r \in V$ gilt.

Wir setzen nun $\omega = f(0)$ und zeigen, dass $g: V \to W$, $v \mapsto f(v) - \omega = f(v) - f(0)$ lin. ist.

Soll g linear sein, muss insbes. $\underbrace{g(0)}_{f(0) - \omega} = 0$ gelten, also $\omega = f(0)$

Mit $(*)$ erhalten wir zunächst

$$\underbrace{f\left(\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}v'\right)}_{= f\left(\frac{1}{2}(v+v') + \frac{1}{2}\cdot 0\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} f(v+v') + \frac{1}{2} f(0)} \overset{(*)}{=} \tfrac{1}{2} f(v) + \tfrac{1}{2} f(v')$$

$2 \in K$ invertierbar, also $1+1 \neq 0$ (sollte in Aufgabe eig. stehen) $\leadsto$ stimmt noch, aber Beweis anders falls $1+1=0$.

für alle $v, v' \in V$. Multiplikation mit 2 liefert also

$$f(v) + f(v') \overset{(**)}{=} f(v+v') + f(0)$$

und wir erhalten

$$g(v) + g(w) = f(v) - f(0) + f(v') - f(0) = f(v) + f(v') - 2f(0)$$

$$\overset{(**)}{=} f(v+v') - f(0)$$

$$= g(v+v').$$

Ist nun $\lambda \in K$ und $v \in V$, so gilt zudem

$$f(\lambda v) = f(\lambda v + (1-\lambda)0) = \lambda f(v) + (1-\lambda) f(0)$$

$$= \lambda(f(v) - f(0)) + f(0),$$

sodass

$$g(\lambda v) = f(\lambda v) - f(0) = \lambda(f(v) - f(0)) = \lambda g(v).$$

Also ist g linear.