Tutoriumsaufgabenblatt Tag 4

Determinanten:

Aufgabe 1 Schreiben Sie für eine 3×3-Matrix die Leibnizformel vollständig aus und leiten sie dadurch die Regel von Sarrus her. (Zur Erinnerung: Die Regel von Sarrus besagt, dass die Determinante einer 3×3-Matrix A gegeben ist durch

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Determinante eine Ähnlichkeitsinvariante ist. Also, dass ähnliche Matrizen die gleiche Determinante haben.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_3(K)$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_4(K)$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 42 & 42 \\ 1 & \frac{1}{187} & \frac{67}{13} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & x \end{pmatrix} \in Mat_4(\mathbb{R})$

d) Welche der obigen Matrizen sind invertierbar?

Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit:

Aufgabe 4 Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 20 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 Geben Sie eine Matrix $A \in Mat_2(K)$ an, mit $\chi_A(x) = x^2 + a_1 x + a_0$. Wie könnte eine Verallgemeinerung für ein normiertes Polynom der Form $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ aussehen?

Aufgabe 6 Geben Sie jeweils eine Matrix an, welche folgende Eigenwerte besitzt:
a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3$
b) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$
c) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2$

Aufgabe 7 Sind die Matrizen aus Aufgabe 4 diagonalisierbar? Wenn ja, diagonalisieren Sie diese.

Aufgabe 8 Es sei $f\colon V \to V$ ein Automorphismus. Zeigen Sie, dass ein Polynom $q \in K[x]$ existiert mit $q(f) = f^{-1}$.

Aufgabe 9 (Zusatz) Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{C})$$

diagonalisierbar?
Dazu: Ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ von Grad n nennt man separabel, wenn es n verschieden Nullstellen besitzt. Man kann zeigen, dass ein Polynom genau dann separabel ist, wenn es teilerfremd zu seiner Ableitung f' ist, also $ggT(f, f') = 1$ gilt.

Aufgabe 10 (Zusatz) Sei $K = \mathbb{C}$. Man zeige, ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ erfüllt genau dann $f^r = 0$ (für geeignetes $r > 0$), wenn f ausser 0 keinen weiteren Eigenwert besitzt.