# Lineare Algebra I – Blatt 14 – freiwillig

Keine Abgabe

**Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. (Wählen Sie geschickte Zeilen und/oder Spalten zum entwickeln.)

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2:**

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind bilinear? Unter denen, die bilinear sind: Welche sind symmetrisch, welche sind positiv definit, welche sind Skalarprodukte?

(a) $\beta_1(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}) = a_1 + b_1$

(b) $\beta_2(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}) = a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$

(c) $\beta_3(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}) = a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_3$

(d) $\beta_4(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}) = (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

(e) $\beta_5(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_2 b_2 + 5 a_3 b_3$

**Aufgabe 3:**

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Formeln gelten für beliebige $u, v \in V$? Für die die nicht gelten: Geben Sie konkrete Gegenbeispiele an (z. B. in $\mathbb{R}^2$).

(a) $\langle 3u, 3v \rangle = 3\langle u, v \rangle$.

(b) $\langle 3u, v \rangle = \langle u, 3v \rangle$.

(c) $\langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$.

(d) $\langle u + v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle$.

**Aufgabe 4:**

Es soll gezeigt werden, dass der Satz von Pythagoras in beliebigen euklidischen Vektorräumen gilt.

Sei also $V$ ein euklidischer Vektorraum. Wir definieren, dass zwei Vektoren $u, v \in V$ *senkrecht zueinander* sind, wenn $\langle u, v \rangle = 0$ ist.

(a) Wenn $u, v \in V$ senkrecht zueinander sind, bilden die Punkte 0, $u$ und $u + v$ ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen $\|u\|$, $\|v\|$ und $\|u + v\|$. Zeigen Sie also: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(b) Zeigen Sie auch die Rückrichtung: Wenn $u, v \in V$ Vektoren sind, für die $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ gilt, dann sind $u$ und $v$ senkrecht zueinander.

(c) Überprüfen Sie nochmal explizit, ob die Behauptungen (a) und (b) auch stimmen, wenn einer der Vektoren 0 ist. Insbesondere: Welche Vektoren $v$ sind zum Nullvektor laut unserer obigen Definition senkrecht?

Hinweis: Für (a) und (b) ist eine der Formeln aus Aufgabe 3 nützlich.