.................................................
Name und Matr-Nr. (a)

.................................................
Name und Matr-Nr. (b)

# Lineare Algebra I – Blatt 3

Abgabe am 9.11.2016 in der Vorlesung

| 1 | 2 | 3 | 4 | B[1] | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | (a) | |
| | | | | (b) | |

........... Gruppe ........................................................................................................................ Zusammengearbeitet mit

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

**Aufgabe 1 (4 Punkte):**

Betrachten Sie die folgenden Relationen. Handelt es sich um Äquivalenzrelationen? Wenn ja, geben Sie die zugehörige Partition an. Wenn nein, begründen Sie durch ein konkretes Beispiel.

(Beispiel-Lösung für die Relation $\leq$ auf $\mathbb{Q}$: „Dies ist keine Äquivalenzrelation: Da $3 \leq 5$ aber nicht $5 \leq 3$, ist Symmetrie verletzt.“)

1. Auf der Menge $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$: $a \sim b \iff a \cdot b > 0$
2. Auf der Menge $\mathbb{Z}$: $a \approx b \iff b - 1 \leq a \leq b + 1$

**Aufgabe 2 (4 Punkte):**

Sei $\circ\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $a \circ b = a + b - 1$.

1. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ eine Gruppe ist und geben Sie das neutrale Element an.
2. Geben Sie einen Gruppenisomorphismus $(\mathbb{Z}, \circ) \to (\mathbb{Z}, +)$ an (und rechnen Sie nach, dass es sich wirklich um einen Gruppenisomorphismus handelt).

**Aufgabe 3 (6 Punkte):**

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe (mit neutralem Element $e$) und $H \subset G$ eine Teilmenge. In der Vorlesung wurde behauptet aber nicht bewiesen: $H$ ist eine Untergruppe von $G$ genau dann wenn die folgenden drei Bedingungen alle gelten:

- $H$ ist abgeschlossen unter der Verknüpfung $\circ$, d. h. für alle $a, b \in H$ gilt $a \circ b \in H$.
- $e \in H$
- $H$ ist abgeschlossen unter Inversen, d. h. für alle $a \in H$ gilt: $a^{-1} \in H$.

Was an dieser Behauptung fraglich ist: Könnte es sein, dass $H$ eine Untergruppe ist, aber das neutrale Element von $H$ ein anderes als das von $G$ ist? Im Folgenden soll dies beantwortet werden.

1. Zeigen Sie: Ist $G$ eine Gruppe und ist $a \in G$ ein Element, für das $a \circ a = a$ gilt, so ist $a$ das neutrale Element von $G$.
2. Zeigen Sie: Ist $H$ eine Untergruppe von $G$, so ist das neutrale Element von $H$ das gleiche wie das neutrale Element von $G$.
3. Für Halbgruppen wäre die obige Behauptung falsch: Betrachten Sie $\mathbb{N}$ als Halbgruppe mit der Multiplikation als Verknüpfung. Geben Sie eine Teilmenge $H \subset \mathbb{N}$ an, die eine Halbgruppe mit neutralem Element ist, so dass das neutrale Element von $H$ aber nicht das selbe ist wie das von $\mathbb{N}$. (Geben Sie die beiden neutralen Elemente an.) (Zur Erinnerung: Wir fassen 0 als natürliche Zahl auf, d. h. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$)

**Aufgabe 4 (2 Punkte):**

Sei $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}$ als Gruppen mit $+$ als Verknüpfung aufgefasst werden. Wir schreiben auch $+$ für die Verknüpfung auf $G$.

1. Geben Sie das neutrale Element von $G$ an.
2. Bestimmen Sie alle Elemente $a$ von $G$, für die gilt: $a + a + a$ ist das neutrale Element von $G$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.