Tutorium zur Linearen Algebra I, 4.11.2019, zu Kapitel L6 & L7

Sei $\emptyset \neq H$, wir haben Verknüpfung $*: H \times H \to H$.

Halbgruppe	$*$ assoziativ
[Kürzbare Halbgruppe	zusätzlich: $\forall a,x,y \in H: (a*x = a*y \Rightarrow x=y) \wedge (x*a = y*a \Rightarrow x=y)$]
Halbgruppe mit Eins / Monoid	zusätzlich: es gibt ein neutr. El. $e \in H$, d.h. $\forall a \in H: a*e = a = e*a$
Gruppe	zusätzlich: jedes El. ist invertierbar, d.h. $\forall x \in H\ \exists y \in H: x*y = e = y*x$ $\rightsquigarrow$ schreibe x^{-1} für y $\Big\}$ $\Rightarrow$ jede Gruppe ist kürzbar
abelsche Gruppe	zusätzlich: Kommutativität, d.h. $\forall x,y \in H: x*y = y*x$

$\Leftarrow$ $0 \cdot x = 0$ also $0 \cdot x = 1$ unlösbar $\Rightarrow 0$ nicht inv'bar

Ring: $(R,+,\cdot)$	(i) $(R,+)$ ist (abelsche) Gruppe, neutr. El. heißt 0 (ii) $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe mit Eins, neutr. El. heißt 1 (iii) Distributivgesetze: $\forall a,x,y \in R$: $a\cdot(x+y) = ax+ay$, $(x+y)\cdot a = x\cdot a + y \cdot a$
Kommutativer Ring	zusätzlich: $\forall x,y \in R: x\cdot y = y \cdot x$
Einheitengruppe in R:	$R^* = \{$invertierbare El. in $R\}$ $= \{u \in R : \exists v \in R: uv = 1 = vu\}$

Bsp.: $(\mathbb{Z}/12)^* = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$

$\bar{5}\cdot\bar{5} = \overline{25} = \bar{1}$, $\quad \bar{7}\cdot\bar{7} = \overline{49} = \bar{1}$.

$\overline{11} = \overline{-1} \rightsquigarrow \overline{(-1)}\cdot\overline{(-1)} = \bar{1}$

Körper K	Kommutativer Ring $(K,+,\cdot)$ mit $1 \neq 0$, falls $K^* = K \setminus \{0\}$.

Bsp.: $(\mathbb{Z}/5)^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, ist Körper

$\bar{2}\cdot\bar{3} = \bar{6} = \bar{1}$

Halbgruppe H heißt kürzbar, falls $\forall a,x,y \in H$: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$
und $x * a = y * a \Rightarrow x = y$

Bsp.: Halbgruppe, die nicht kürzbar ist: $H = \mathbb{N}_0$, $x * y := \max\{x, y\}$

- Ist Halbgruppe: $(x*y)*z = \max\{x*y, z\} = \max\{\max\{x,y\}, z\}$
$= \max\{x,y,z\} = \max\{x, \max\{y,z\}\} = \max\{x, y*z\}$
$= x*(y*z)$.
- Ist nicht kürzbar: $5 = 5$
$\Rightarrow 5*3 = 5*2$, aber $3 \neq 2$.

Bsp.: für kürzbare Halbgruppe, die keine Gruppe ist: • $(\mathbb{Z}, \cdot)$
$(a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y \ \ldots \checkmark)$
$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$

- Ring $(R, +, \cdot)$, wo $R^* \neq R \setminus \{0\}$
$\rightsquigarrow H = R \setminus \{0\}$ kürzbare Halbgruppe, die keine Gruppe

---

<u>Abbildungen:</u> $H := \{f : D \to D,\ x \mapsto f(x) \text{ Abb.}\}$

$\circ : H \times H \to H,\ (f, g) \mapsto f \circ g$
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Identitätsabb. auf D: $\mathrm{id}_D : D \to D,\ x \mapsto x$
id_D ist neutrales El.: $f \circ \mathrm{id}_D = f$, $\mathrm{id}_D \circ f = f$
Haben: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Also: H ist Halbgruppe mit Eins $= \mathrm{id}_D$.
Inverse Abb. zu $f : D \to D$, $x \mapsto f(x)$, f bijektiv,
ist: $f^{-1} : D \to D$, $y \mapsto f^{-1}(y)$
mit
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_D$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$.

Haben: f^{-1} ist inverses El. von f in H,
existiert für bijektives f

$$\begin{tikzcd} \underset{x}{D} \arrow[r, bend left, "f"] & \underset{y}{D} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad x \mapsto f(x) = y$$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = f^{-1}(y) \end{array}\right\}$$

1. Bsp.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$, bijektiv

$$y = \underbrace{3x-1}_{f(x)} \Leftrightarrow y + 1 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3} = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+1}{3}$$

Prüfe: $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+1}{3} - 1 = x = id_{\mathbb{R}}(x)$ ✓

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x-1) = \frac{(3x-1)+1}{3} = x = id_{\mathbb{R}}(x)$ ✓

$X \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists C : \forall x \in X : |x| \leq C$,

z.B. $[-2,3] \subseteq \mathbb{R}$, aber unendl.

X endliche Menge $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \exists f : \{1, \dots, n\} \to X : f$ bijektiv

Dann heißt n die Kardinalität/Mächtigkeit/Länge von X,

kurz: $|X| = \# X = n$

X ist unendliche Menge, falls X nicht endlich,

falls $\neg \left(\exists n \in \mathbb{N}_0 \; \exists f : \{1, \dots, n\} \to X : f \text{ bijektiv} \right)$

falls $\forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall f : \{1, \dots, n\} \to X : f$ nicht bijektiv

---

$\neg \exists f : X \to \mathcal{P}(X)$, f surjektiv

Also: $\neg \exists f : \underbrace{\mathbb{N}_0}_{\text{abzählbar unendlich}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$, f bijektiv

nicht abzählbar unendl.,
d.h. überabzählbar unendlich

Def.: X abzählbar unendlich, falls $\exists f : \mathbb{N}_0 \to X$, f bijektiv.

überabzählbar unendlich: Bsp. $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$, $\mathbb{R}$

$\exists$ linksinv. $\Leftrightarrow$ • $f : X \to Y$ injektiv, falls: $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

d.h. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\exists$ rechtsinv. $\Leftrightarrow$ • $f : X \to Y$ surjektiv, falls $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$