....
1. Name und Matrikel-Nummer

....
2. Name und Matrikel-Nummer

....
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 10

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 18.12.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben, d. h. $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung ${}_B[f]_B$, wenn B die Basis $B = (v_1, v_2, v_3)$ ist mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y, z) = (x + y, 2z - x)$.
Weiter seien die Basen $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $B' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ von $\mathbb{R}^3$ und die Basen $C = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $C' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ von $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Matrixdarstellung ${}_C[f]_B$.

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung ${}_{C'}[f]_{B'}$ mit dem Basiswechselsatz.
Welche Basiswechselmatrizen werden dafür benötigt?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Sei $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{m \times k}$. Zeigen Sie, dass $AX = B$ genau dann lösbar ist, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ ist.

(b) Sei $A \in K^{m \times n}$ mit $\mathrm{rg}(A) < n$. Zeigen Sie, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Matrix $X \in K^{n \times k}$, $X \neq 0$, gibt mit $AX = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Die Abbildung $f : (K^n)^n \to K^m$ sei alternierend und n-multilinear.

(a) Seien $f_1, \ldots, f_m : (K^n)^n \to K$ definiert durch $f_i := \pi_i \circ f$, wobei $\pi_i : K^m \to K, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} \mapsto \xi_i$ die Projektion auf die i-te Komponente bezeichne, für $1 \leq i \leq m$. Zeigen Sie, dass $f_1, \ldots, f_m$ Determinantenfunktionen sind.

(b) Zeigen Sie, dass f durch Vorgabe von $f(e_1, \ldots, e_n)$ eindeutig bestimmt ist, d. h. für ein $a \in K^m$ existiert genau eine solche Abbildung f mit $f(e_1, \ldots, e_n) = a$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu L17 und L18: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist die Ausgangslage beim Basiswechselproblem?

2.) Welche Matrizen heißen Basiswechselmatrizen?

3.) Warum sind Basiswechselmatrizen invertierbar?

4.) Wie lautet der Basiswechselsatz?

5.) Wann heißen zwei Matrizen äquivalent?

6.) Wann heißen zwei Matrizen ähnlich?

7.) Zu welcher einfachen Form ist eine Matrix vom Rang r stets äquivalent?

8.) Warum haben äquivalente Matrizen denselben Rang?

9.) Wie kann man mit einer Basiswechselmatrix die Koordinaten eines Vektors im K^n zur Standardbasis in die Koordinaten zu einer anderen Basis B umrechnen?

10.) Wie definiert man eine Determinantenfunktion auf dem $(K^n)^n$?

11.) Wann nennt man eine Determinantenfunktion normiert?

12.) Welche Eigenschaften hat eine Determinantenfunktion? Gibt es eine Ähnlichkeit zu den Zeilenumformungen im Gaußschen Eliminationsverfahren?

13.) Wie unterscheidet sich eine (beliebige) Determinantenfunktion von einer normierten?

14.) Warum kann es höchstens eine normierte Determinantenfunktion geben?

15.) Wie kann man die Existenz der Determinantenfunktion beweisen? Wie geht die rekursive Konstruktion der Determinantenfunktion?

16.) Warum ist die Konstruktion unabhängig von dem gewählten Konstruktionsindex i?

17.) Wie definiert man die Determinante eines Endomorphismus von K^n?

18.) Welche Eigenschaften hat $\det f$?

19.) Inwiefern kann man mit der Kennzahl $\det f$ entscheiden, ob f ein Isomorphismus ist?

20.) Wie lässt sich etwas allgemeiner die Determinante eines Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V definieren?

21.) Hat diese Determinante dieselben Eigenschaften? Warum?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Für drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ sei $[a, b, c] := \det(a, b) + \det(b, c) + \det(c, a)$.
Drei Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $[a, b, c] = 0$ ist.
Für $a, b, c, x \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\det(a, b)c + \det(b, c)a + \det(c, a)b = 0 \text{ und}$$

$$[x, b, c] + [x, c, a] + [x, a, b] = [a, b, c] \text{ und}$$

$$[a, b, c]x = [x, b, c]a + [x, c, a]b + [x, a, b]c.$$