. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 11

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 8.1.2020
bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -18 \\ -4 & 7 & -16 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Welche Matrixdarstellung hat A bezüglich einer geeigneten Basis aus Eigenvektoren?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei f der Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}_3[T] := \{p \in \mathbb{R}[T];\ \deg p \leq 3\}$, der durch

$$f(p) := T^4 p'' + (1 - 4T^3)p' + (1 + 6T^2)p$$

gegeben ist, wobei p' bzw. p'' die erste bzw. zweite (formale) Ableitung bezeichnen. (Beachten Sie, dass $f(p) \in \mathbb{R}_3[T]$ für alle $p \in \mathbb{R}_3[T]$ gilt.) (a) Berechnen Sie $\det f$. (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von f. (c) Bestimmen Sie zum einzigen ganzzahligen Eigenwert auch die Eigenvektoren.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Sei f ein Endomorphismus des K-Vektorraums V. Zeigen Sie: Ist jeder Vektor $v \neq 0$ ein Eigenvektor von f, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

(b) Sei $A \in K^{n \times n}$ mit $\mathrm{rg}(A) < n$. Zeigen Sie, dass 0 ein Eigenwert von A ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Seien $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j \\ i>j}} (\alpha_i - \alpha_j)$$

Hinweis: Man ziehe zunächst von der letzten Spalte das α_0-fache der vorletzten Spalte ab, und fahre so fort, bis die 1. Zeile in $(1, 0, \ldots, 0)$ übergeführt wurde. Dann Induktion.

(b) Seien $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$ gegeben mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für alle $i \neq j$. Zeigen Sie: Ist $p \in K[T]$ ein Polynom vom Grad höchstens n mit $p(\alpha_i) = 0$ für alle $0 \leq i \leq n$, so ist $p = 0$ (das Nullpolynom).

Hinweis: Die Matrix in (a) ist die Matrixdarstellung des Homomorphismus $f : T^j \mapsto (\alpha_0^j, \ldots, \alpha_n^j)^T$ bezüglich der Basen $(1, T, \ldots, T^n)$ und $(e_1, \ldots, e_{n+1})$. Dann Teil (a) benutzen oder direkt mit "f ist Isomorphismus" argumentieren.

Bitte wenden

Wissensfragen zu L19 und L20: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wie wird die Determinante einer Matrix definiert?
2.) Welche Eigenschaften hat sie?
3.) Wie lautet der Entwicklungssatz von Laplace?
4.) Was ist eine Streichungsmatrix?
5.) Was nennt man eine Unterdeterminante?
6.) Kann man eine Determinante auch nach Spalten statt Zeilen Laplace-entwickeln? Warum?
7.) Wie geht man beim vereinfachten Gaußschen Eliminationsverfahren vor, um die Determinante einer Matrix auszurechnen?
8.) Wie berechnet man die Determinante einer Kästchenmatrix?
9.) Was bezeichnet man als das algebraische Komplement einer Matrix?
10.) Wie kann man damit die Inverse einer Matrix ausrechnen?
11.) Wie lautet die Cramersche Regel zur Berechnung der Lösung eines LGS $Ax = b$ mit invertierbarer Matrix A?
12.) Was ist ein Eigenwert eines Endomorphismus f? Was ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ? Was ist das Spektrum von f?
13.) Kann man Eigenvektoren auch von Matrizen statt von Endomorphismen definieren?
14.) Warum genügt es, Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen zu studieren?
15.) Warum sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig?
16.) Wieviele verschiedene Eigenwerte kann ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums haben?
17.) Wie berechnet man die Eigenwerte?
18.) Was ist das charakteristische Polynom von f bzw. A?
19.) Welchen Grad hat es? Hat es Koeffizienten mit besonderer Bedeutung?
20.) Unter welchen Bedingungen, speziell an den Körper K, gibt es stets mindestens einen Eigenwert?
21.) Was ist ein Eigenraum von f? Wie berechnet man die zugehörigen Eigenräume zu den Eigenwerten?
22.) Warum haben ähnliche Matrizen/Endomorphismen dasselbe charakteristische Polynom?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Sei $C = (\gamma_{j,\ell}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix über $\mathbb{C}$ der Dimension n. Dann kann $Cz = 0$ für $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ als homogenes LGS in n Unbekannten $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ über $\mathbb{C}$ aufgefasst werden. Schreibt man $\gamma_{j,\ell} = \alpha_{j,\ell} + i\beta_{j,\ell}$ und $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ mit reellen $\alpha_{j,\ell}, \beta_{j,\ell}, \xi_j, \eta_j$, so ist notwendig und hinreichend zur nichttrivialen Lösbarkeit von $Cz = 0$, dass die Determinante $\det C$ verschwindet. Jeweils für Real- und Imaginärteil betrachtet ergibt das *zwei Gleichungen* mit den $2n^2$ reellen Größen $\alpha_{j,\ell}, \beta_{j,\ell}$. Andererseits lassen sich die gegebenen Gleichungen als $2n$ lineare homogene Gleichungen für $2n$ reelle Unbekannte schreiben. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen besteht diesmal in dem Verschwinden einer reellen Determinante, d. h. in *einer Gleichung* zwischen den $\alpha_{j,\ell}, \beta_{j,\ell}$. Wie kann das stimmen?

Wir wünschen allen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2020!