. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 12

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 15.1.2020 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist. (Zu welcher Diagonalmatrix?) Berechnen Sie dafür *keine* Eigenvektoren.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei $p(T) := T^n - \alpha_{n-1}T^{n-1} - \alpha_{n-2}T^{n-2} - \cdots - \alpha_0 \in K[T]$ ein Polynom. Dann heißt die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

die Begleitmatrix zu p. Zeigen Sie:

(a) Für das charakteristische Polynom $\chi_A(T)$ von p gilt $\chi_A(T) = (-1)^n p(T)$.

(b) Ist λ Nullstelle von $p(T)$, so ist $(1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})^T$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

(c) Das Polynom $p(T)$ habe n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Bestimmen Sie eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ sei ein diagonalisierbarer Endomorphismus. Zeigen Sie: Ist $E \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, d. h. gilt $f(x) \in E$ für alle $x \in E$, so ist die Einschränkung $f|_E$ diagonalisierbar.

Hinweis 1: Man verschaffe sich eine Basis $x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$ von V so, dass $E = L(x_1, \ldots, x_k)$ ist und $y_{k+1}, \ldots, y_n$ Eigenvektoren von f sind.
Hinweis 2: Ist $W = L(y_{k+1}, \ldots, y_n)$, so ist $V = E \oplus W$. Dann geeignete Vektoren $y_1, \ldots, y_k$ jeweils (geeignet) als $u_i + w_i$ schreiben und zeigen, dass die u_i linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit reellen positiven Diagonalelementen, so ist mit dem Standardskalarprokukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle$ ein Skalarprodukt.

Gilt dies (im Falle $n = 2$) auch für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Bitte wenden

Wissensfragen zu L21 und L22: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wie kann man einen diagonalisierbaren Endomorphismus mit den Dimensionen seiner Eigenräume charakterisieren?
2.) Welches Kriterium gibt es dafür noch, wenn man das charakteristische Polynom und seine Zerlegung in Linearfaktoren kennt?
3.) Was ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts?
4.) Was ist die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts?
5.) Welches Kriterium liefern diese Vielfachheiten für die Charakterisierung eines diagonalisierbaren Endomorphismus?
6.) Nennen Sie eine Matrix, die nicht diagonalisierbar ist.
7.) Wie sieht die Situation über dem Körper $K = \mathbb{C}$ aus?
8.) Wann nennt man einen Endomorphismus bzw. eine Matrix trigonalisierbar?
9.) Was für Diagonalelemente besitzt eine obere Dreiecksmatrix?
10.) Wie kann man eine trigonalisierbare Matrix mit $\chi_A(T)$ charakterisieren?
11.) Was ist eine Fahnenbasis?
12.) Warum ist jede Matrix über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar?
13.) Was ist eine Bilinearform?
14.) Wann heißt eine Bilinearform symmetrisch, wann alternierend?
15.) Was ist eine Sesquilinearform? Wann heißt sie hermitesch?
16.) Wann nennt man eine hermitesche Form positiv definit?
17.) Was ist ein Skalarprodukt?
18.) Welche Rechen-Eigenschaften hat ein Skalarprodukt?
19.) Wie ist das kanonische Skalarprodukt definiert? Wie kann man das kanonische Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ definieren? Wie geht das mit dem hermitesch adjungierten Vektor?
20.) Wie definiert man mit einem Skalarprodukt die Länge bzw. Norm eines Vektors? Was ist der Abstand zwischen zwei Vektoren? Wie definiert man eine Metrik?
21.) Was ist ein euklidischer bzw. unitärer Raum?
22.) Wie lautet die Dreiecksungleichung und wie wird sie bewiesen?
23.) Wie lautet die Ungleichung von Cauchy–Schwarz und wie wird diese bewiesen?
24.) Unter welcher Voraussetzung besteht Gleichheit in der Cauchy–Schwarz-Ungleichung?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Sei $\mathcal{P}$ die Menge der ungeraden Primzahlen, für $N \in \mathbb{N}$ sei $G(N) := \#\{n \leq N;\ \exists p, q \in \mathcal{P} : n = p + q\}$ und $R(N) := \#\{(p, q) \in \mathcal{P}^2;\ N = p + q\}$.
Zeigen Sie, dass $G(N) \sum_{n \leq N} R^2(n) \geq \left(\sum_{n \leq N} R(n)\right)^2$ gilt.