. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I — Letztes Blatt 13

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 22.1.2020 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Orthonormieren Sie die Familie (v_1, v_2, v_3) von Vektoren des $\mathbb{C}^4$ nach Schmidt, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 3i-1 \\ 1 \\ 2+i \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ i-1 \\ 2-i \\ 1 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Es sei $A = \begin{pmatrix} i-1 & 1+i & i \\ 3i-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2 & i & 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 3}$ und $b = \begin{pmatrix} 4i \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$.

Bestimmen Sie $x \in \mathbb{C}^3$ so, dass $\|Ax - b\|$ minimal ist. **Hinweis:** Normalengleichung lösen.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $f, g : V \to V$ seien Endomorphismen mit der Eigenschaft $f \circ g = g \circ f$ (z. B. $g = f^*$ für einen normalen Endomorphismus f eines unitären Raums V, oder $g = f^{-1}$ für ein invertierbares f, ...). Zeigen Sie:

(a) Ist λ Eigenwert von f, so ist der Eigenraum $E_\lambda := \ker(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ invariant unter g, d.h. $g(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

(b) Hat f insgesamt n verschiedene Eigenwerte, so ist g diagonalisierbar und jeder Eigenvektor von f ist ein Eigenvektor von g.

(c) Sind f und g diagonalisierbar, so gibt es eine Basis von V, deren Vektoren sowohl Eigenvektoren von f als auch von g sind.

Hinweis: Aufgabe 3 von Blatt 12 für $g|E_{\lambda_i}$ verwenden.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei V ein unitärer Raum endlicher Dimension und $f \in \operatorname{End}(V)$ normal. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f^*(x), f^*(y)\rangle$.

(b) x ist Eigenvektor von f zum Eigenwert λ genau dann, wenn x ein Eigenvektor von f^* zum Eigenwert $\bar\lambda$ ist. **Hinweis:** Man berechne $\langle f(x) - \lambda x, f(x) - \lambda x\rangle$.

(c) Ist der Untervektorraum U von V f-invariant (d. h. $f(U) \subseteq U$), so ist $U^\perp$ f^*-invariant.

Bitte wenden

Wissensfragen zu L23 und L24: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wann stehen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ senkrecht aufeinander?

2.) Was besagt der Satz vom Rechteck? Der Satz vom Rhombus? Der Satz von Phythagoras? Wie kann man diese vektoriell beweisen?

3.) Wie erklärt man, was ein (geometrischer Winkel) ist?

4.) Was sind dann die Winkelfunktionen?

5.) Was besagt der Kosinussatz?

6.) Wie definiert man eine Drehmatrix?

7.) Was sind Polarkoordinaten?

8.) Was ist das Vektorprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$? Kann man das auch in anderen Dimensionen definieren?

9.) Wie definiert man die Orientierung bei einem Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$? Warum gibt es nur zwei mögliche Orientierungen?

10.) Was ist ein Spat, was ein Simplex, und wie kann man deren Volumen berechnen?

11.) Wie kann man affine Räume im $\mathbb{R}^n$ darstellen? Was ist die Normalendarstellung einer Hyperebene?

12.) Was bezeichnet man als Hessesche Normalform?

13.) Was ist eine senkrechte Projektion bzw. ein Lot?

14.) Wie berechnet man Abstände von Punkten zu einer Hyperebenen in Hessescher Normalform?

15.) Wann stehen zwei Vektoren in einem unitären Raum senkrecht aufeinander?

16.) Was ist ein ONS in einem unitären Raum?

17.) Wie führt man das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren durch? Was gewinnt man damit?

18.) Warum heisst $S^\perp$ das orthogonale Komplement einer Menge S von Vektoren?

19.) Was ist das Proximum?

20.) Wie löst man ein unlösbares LGS $Ax = b$ immerhin so, das Ax_0 möglichst nahe an b ist?

21.) Was ist die adjungierte Matrix?

22.) Was bezeichnet man als Normalengleichung?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Es sei $P(T) = (\gamma_1 - T)(\gamma_2 - T)\cdots(\gamma_n - T) \in \mathbb{C}[T]$. Dann gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dass

$$\det \begin{pmatrix} \gamma_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & \gamma_2 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & \beta & \gamma_3 & \cdots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix} = \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta}.$$

(Man addiere zu allen Einträgen die Unbestimmte T, die Determinante ist damit eine lineare Polynomfunktion in T und als solche aus zwei speziellen Werten bestimmbar.)