. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 2

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

1	2	3	4	Σ

Abgabe: bis Mittwoch 23.10.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Antworten zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $U = \{1, 2, 3\}$ und $V = \{2, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a)	$U \in V$	(b)	$\{2\} \in V$	(c)	$2, 4 \in V$	(d)	$V = \{2, 4, 2, 2\}$
(e)	$3 \notin U$	(f)	$1 \in V$	(g)	$U \setminus V = \{1, 3\}$	(h)	$V \ni 2$
(i)	$x \in U \wedge x \in V$ $\Rightarrow x = 2$	(j)	$V \supseteq U$	(k)	$\{2, 3\} \subsetneq U$	(l)	$\{2, \{2, 3\}\} \subseteq U$
(m)	$V \setminus U = \{4\}$	(n)	$U \cup V \ni 4$	(o)	$U \neq V$	(p)	$\emptyset \in U$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Definition: Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen teilerfremd, genau wenn

$$\forall\, c \in \mathbb{N} : \; c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c = 1.$$

(Bemerkung: $c \mid a$ bedeutet "c teilt a")
Wie kann man diese Definition rein sprachlich ausdrücken? Schreiben Sie die formale Verneinung der Aussage auf und drücken Sie diese ebenfalls sprachlich aus.
Die Abkürzung $c \mid a$ steht für die Aussage $\exists\, d \in \mathbb{Z} : a = cd$, Entsprechendes gilt für $c \mid b$. Wenn man diese Formeln in obiger Definition verwendet, wie lautet dann die formale Verneinung und ihre sprachliche Umsetzung?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Wieviele Elemente enthält die Menge $\{3, 4, 3\}$?

(b) Wieviele Elemente enthält die Menge $\{\{2, 3, 4\}, \{4, 7\}\}$?

(c) Ist die Aussage $\emptyset \subseteq \emptyset$ wahr?

(d) Warum kann die Menge $\{a, b, c\}$ weniger als 3 Elemente haben?

(e) Wieviele (und welche) verschiedene(n) Teilmengen hat $\{a, b, c\}$ in welchen Fällen[1]?

(f) Beweisen Sie die folgende Aussage für zwei Mengen U und V: Es gilt $U \cap V = U \Leftrightarrow U \subseteq V$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Formulieren Sie für jede der folgenden Aussagen ihre Negation.

(a) Es gibt keine natürliche Zahl n zwischen 30 und 40, die 10101 teilt.

(b) Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 24 teilbar.

Auf diese Weise sind vier Aussagen entstanden. Geben Sie für die wahren Aussagen davon jeweils einen Beweis an.

Bitte wenden

[1](In manchen Fällen darf auf analoge Fälle verwiesen werden.)

Wissensfragen zu L2 und L3: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist ein direkter Beweis, was ein indirekter Beweis?

2.) Welche Arten eines indirekten Beweises gibt es?

3.) Was ist eine Menge?

4.) Wie würden Sie die Menge $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ durch Aussondern beschreiben?

5.) Welche Mengenverknüpfungen kennen Sie?

6.) Was bedeutet das Teilmengenzeichen?

7.) Was ist die Potenzmenge einer Menge?

8.) Wie führt man einen Beweis mit dem Existenzquantor?

9.) Wie führt man einen Beweis mit einer Fallunterscheidung?

10.) Wann würde man typischerweise eine Fallunterscheidung vornehmen?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Zur Russelschen Antinomie: Es gibt offensichtlich Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten: alle bisherigen Beispiele für Mengen A sind derart, dass $A \notin A$ gilt. Betrachten wir die Russel-Menge $R := \{A;\ A \notin A\}$. Gilt $R \in R$, muss $R \notin R$ gelten und umgekehrt!
Lässt sich dieses Paradox auflösen?
Beispiel: Bücher-Kataloge können sich selbst aufführen wie z. B. der "Katalog aller 2019 erschienenen Kataloge", der 2019 erscheint. Der Verlag möchte einen Katalog aller Kataloge herausbringen, die sich nicht selbst aufführen. Soll dieser darin aufgeführt werden oder nicht?
Finden Sie weitere solche Beispiele.